

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS

PARABOLÓIDES ELÍPTICOS
- MONOLÍTICOS E PRÉ-MOLDADOS -
SOBRE BASE RETANGULAR



Eng.º LÚCIO ROBERTO DE ALMEIDA

DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS

SÃO CARLOS, janeiro de 1982

Class.	TESE
PHA	A-442p
Tombo	215/93

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS

PARABOLÓIDES ELÍPTICOS
-MONOLÍTICOS E PRÉ-MOLDADOS-
SOBRE BASE RETANGULAR

ENG.º LÚCIO ROBERTO DE ALMEIDA

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia
de São Carlos da Universidade de São Paulo, como
parte dos requisitos para obtenção do título de
Mestre em Engenharia de Estruturas.

COMISSÃO EXAMINADORA:

PROF.DR. LUIZ G.DE CASTRO LIMA
(SUPLENTE)

PROF.DR. REGIS L.R. LIMA
(SUPLENTE)

PROF.DR. LAFAEL PETRONI

PROF.DR. ROBERTO L.A.BARBATO

PROF DR. DANTE A.O. MARTINELLI
(ORIENTADOR)

SÃO CARLOS, JANEIRO DE 1982

Í N D I C E

I - <u>INTRODUÇÃO</u>	1
1. CONSIDERAÇÕES GERAIS	1
2. CONTEÚDO	9
II - <u>AS CASCAS PRÉ-MOLDADAS NAS COBERTURAS</u>	13
1. CONSIDERAÇÕES GERAIS	13
2. CASCAS CILÍNDRICAS	14
3. COBERTURAS PRISMÁTICAS E PIRAMIDAIS	20
4. PARABOLÓIDES HIPERBÓLICOS	26
5. CONÓIDES	36
6. CÚPULAS	40
7. CASCAS FUNICULARES	44
8. OUTRAS CASCAS PRÉ-MOLDADAS	45
9. ALGUNS ASPECTOS CONSTRUTIVOS DAS ESTRUTURAS EM CASCAS MONOLÍTICAS OU PRÉ-MOLDADAS	51
9.1 - Formas e cimbres	51
9.2 - Concretagem	55
9.3 - Descimbramento	57
III - <u>PARABOLÓIDES ELÍPTICOS SOBRE BASE RETANGULAR:</u> <u>TEORIA E COMPUTAÇÃO</u>	59
1. CONSIDERAÇÕES GERAIS	59
2. TEORIA GERAL DAS CASCAS. DEFINIÇÕES. HIPÓTE SES GERAIS DE CÁLCULO	60

3. EQUAÇÕES GERAIS	62.
3.1 - Esforços solicitantes	62
3.2 - Equações de equilíbrio	65
3.3 - Relações deformações-deslocamentos ...	67
3.4 - Relações tensões-deformações	68
3.5 - Relações esforços-deslocamentos	69
4. TEORIA DAS CASCAS ABATIDAS	70
4.1 - Hipóteses básicas. Equações gerais	70
4.2 - Equações de Vlasov para cascas <u>aba</u> tidas	73
4.3 - Equações de oitava ordem para as <u>cas</u> cas abatidas	76
4.4 - Resolução da equação diferencial de oitava ordem. Processo de Bouma	77
m, 5. OS PARABOLÓIDES ELÍPTICOS SOBRE BASE <u>RETAN</u> GULAR	77
5.1 - Geometria	77
5.2 - Teoria de membrana	80
5.2.1 - Relações geométricas	82
5.2.2 - Relações entre os esforços no elemento curvo e no projetado em oxy	82
5.2.3 - Relações de equilíbrio. <u>Cálcu</u> lo dos esforços	83
5.2.4 - Análise dos resultados obtidos e considerações práticas	88
5.3 - Teoria de Flexão	91
5.3.1 - Solução da equação homogênea ..	93
5.3.2 - Solução geral	97
5.3.3 - Condições de contorno	98
5.3.4 - Os esforços internos e <u>des</u> locamentos	103

6. AUTOMATIZAÇÃO DO CÁLCULO	105
6.1 - Descrição do programa e utilização ...	105
6.2 - Comparação dos resultados obtidos de acordo com a teoria de flexão com os da teoria de membrana e os obtidos por Dikovich	108
6.2.1 - Esforços de membrana	108
7. CONSIDERAÇÕES DE CÁLCULO	113
8. ANÁLISE DA VARIAÇÃO DOS ESFORÇOS NOS PARABOLÓIDES COM A VARIAÇÃO DE CERTOS PARÂMETROS ..	120
9. VERIFICAÇÃO À FLAMBAGEM	127
IV - OS PARABOLÓIDES ELÍPTICOS PRÉ-MOLDADOS	131
1. CONSIDERAÇÕES GERAIS	131
2. COMO SECCIONAR A SUPERFÍCIE DO PARABOLÓIDE ..	132
3. PARABOLÓIDES FORMADOS POR ELEMENTOS PLANOS ..	136
4. PARABOLÓIDES FORMADOS POR ELEMENTOS CURVOS ..	146
5. EXEMPLO DE CÁLCULO. ESTRUTURA MONOLÍTICA OU PRÉ-MOLDADA	155
5.1 - Dados geométricos da cobertura: carregamentos de projeto; características dos materiais	156
5.2 - Verificação da carga crítica de flambagem	158
5.3 - Esforços. Verificações estáticas	160
5.3.1 - Verificações estáticas	162
5.4 - Dimensionamento	165
5.5 - Parabolóide pré-moldado	170
5.6 - Cálculo e dimensionamento do arco de borda	181

5.6.1 - Cálculo de reações provocadas pelos carregamentos horizontais e verticais sobre o arco	187
5.6.2 - Reações provocadas pelo peso próprio do arco. Reações totais ..	188
5.6.3 - Esforços nas seções	188
5.6.4 - Dimensionamento do arco	191
5.7 - Detalhamento da armadura	192
 V - <u>ESTUDO EXPERIMENTAL DAS JUNTAS</u>	194
1. SITUAÇÃO DO PROBLEMA COM AS JUNTAS	194
2. OS ENSAIOS	197
2.1 - Descrição dos modelos. Dispositivo de ensaio	197
2.2 - Os resultados dos ensaios	202
3. CONCLUSÕES E NOVOS ENSAIOS	203
 VI - <u>CONCLUSÕES</u>	207
 BIBLIOGRAFIA	209
 ANEXO 1	216
 ANEXO 2	223
 ANEXO 3	231

RESUMO

Este trabalho visa apresentar subsídios de cálculo e construção das cascas em forma de parabolóides elípticos - monolíticos e pré-moldados - sobre base retangular e também um panorama geral das estruturas de cascas pré-moldadas para coberturas, citando e comentando exemplos significativos.

A teoria de cálculo dos parabolóides elípticos é desenvolvida por analogia destes com as cascas abatidas, resolvendo-se as equações diferenciais que regem seu comportamento através de séries trigonométricas simples. Acompanhando essa parte de cálculo mais teórico, apresenta-se recomendações de cunho prático envolvendo correções a serem feitas em certos esforços, em certos trechos, analisa-se o comportamento dos parabolóides face à variação de certos parâmetros geométricos e o problema de flambagem.

A parte que estuda especificamente a pré-moldagem, aborda aspectos de seccionamento da superfície, formato e dimensões das peças pré-moldadas, levantamento destas, influência de nervuras enrijecedoras na estrutura final e um estudo mais detalhado de juntas acompanhado de resultados experimentais.

I - INTRODUÇÃO

1. CONSIDERAÇÕES GERAIS

Na natureza existem formas que foram e são fontes de inspiração arquitetônica ao homem em todos os tempos e, quando reproduzidas ou quando se consegue captar a essência e a lógica de seus comportamentos e daí aplicá-los corretamente, tem-se obras que, no mínimo, são estruturalmente corretas. Algumas delas originam construções maciças, outras compostas de linhas contínuas ou quebradas e outras de superfícies esbeltas, algumas são leves e delgadas, outras, nem tanto.

Em particular, existem aquelas nas quais a forma, essencialmente a forma, é a responsável pela resistência, em oposição a outras, nas quais esse fator é caracterizado pela massa. E assim, na natureza, a casca de um ovo, as conchas, as couraças de insetos, o cálice das flores, são exemplos marcantes de formas com esse comportamento; aparentemente, são composições frágeis mas, como se sabe, satisfazem plenamente às suas finalidades.

Somente há pouco tempo, e isto foi motivado pela

ausência de um material moldável e resistente o suficiente para gerar superfícies curvas, delgadas e rígidas, o homem teve condições de seguir a natureza nessas formas, o que foi conseguido com o aparecimento do concreto armado, o qual Nervi diz ser o material que, por seu monolitismo e plasticidade, abriu novas visões e perspectivas na arquitetura.

Surgiram então as estruturas em casca que são, talvez, aquelas que mais se adaptam e fazem jus às palavras de Nervi e às propriedades do concreto e com as quais, como os exemplos citados da natureza, consegue-se obter, com um mínimo de material, excelentes resultados estruturais. Permite também soltar a imaginação, expandindo os limites da criatividade dos arquitetos, o que traz, algumas vezes, preocupações a projetistas e construtores.

Voltando no tempo, as estruturas em casca têm sua origem situada na Idade Antiga, quando das construções de arrojadas cúpulas esféricas pelos romanos, das quais a principal é a cobertura do Pantheon, construída ao tempo do Imperador Agrippa - 63 a 12 AC -, destruída no ano 110 da nossa era, e reconstruída nos anos 115 a 125, pelo Imperador Adriano. Essa cúpula tem diâmetro de 44m e peso superior a 12.000 toneladas; por vários séculos o Pantheon foi a maior estrutura desse tipo no mundo.

Durante a Idade Média e o Renascimento, novas cúpulas surgiram com a construção de templos e catedrais, porém ainda com os construtores buscando inspiração na arte dos romanos, como por exemplo, na construção da cúpula do templo de Santa Sofia (532-587) em Constantinopla, que foi a mais importante estrutura da arquitetura bizantina, com 31m de diâmetro, portanto ainda inferior ao do Pantheon. Mil anos mais tarde - 1506 a 1526 - construiu-se a cúpula de São Pedro, em Roma, com diâmetro de 40m e peso aproximado de 10.000 toneladas.

Tampouco nos séculos seguintes conseguiu-se alcançar e superar o talento romano na construção de cúpulas,

e isso somente foi possível com o advento do concreto armado que, com suas características de resistir além dos esforços de compressão também aos de tração e flexão, permitiu espessuras menores e daí menores pesos. Em 1912, portanto quase 2000 anos após a construção do Pantheon, foi possível construir, pela primeira vez, uma estrutura com diâmetro superior a ele; foi a cúpula do Salão do Século em Breslau (Polônia), feita em concreto armado, nervurada, com diâmetro aproximado de 65 m e peso de 1500 toneladas, ou seja, 1/7 do peso do Pantheon ou da cúpula de São Pedro.

Em 1924 foi construída a cúpula esférica da Companhia de Vidros Schott em Jena (Alemanha Oriental), com diâmetro de 40m, espessura de 6cm e peso de 300 toneladas e, se as cúpulas construídas em épocas anteriores não podem ser consideradas como estruturas em casca, principalmente por suas grandes espessuras, estas últimas enquadram-se nessa classificação e pelo menos a de Jena foi calculada como tal.

A partir da construção dessa cúpula em Jena, incrementou-se o uso das estruturas em casca pelo mundo, não somente em forma de cúpula, mas também com outras geometrias e aplicáveis a coberturas de plantas retangulares e a outras finalidades como reservatórios, silos, fundações, etc. Despertou-se então o interesse de projetistas e construtores por essas formas estruturais para a obtenção de coberturas que primam pela elegância e com baixo consumo de material.

Para esse incremento contribuíram, com seus estudos teóricos e experimentais, publicações e projetos, elementos como Dischinger, Finsterwalder, Vlasov, Schorer, Flügge e outros, sendo que, inicialmente, foram pesquisadas e construídas as cascas de formas mais simples e que apresentam menor grau de dificuldade matemática em seus cálculos, depois surgiram as formas mais livres e criativas, ainda que com soluções simplificadas, onde se destacaram os gênios também construtivos de Nervi, Candela e Torroja.

Em vista das vantagens proporcionadas pelas es
truturas em casca e a despeito de cobrirem milhões de me
tros quadrados em todo o mundo, essas estruturas não são
correntes entre nós; esse fato pode ser inicialmente justi
ficado por sua teoria de cálculo não ser difundida o sufi
ciente (ou quase que não) em nosso meio técnico, e segundo,
e esta observação é válida para outros locais no mundo, pe
las dificuldades construtivas causadas por suas geometrias
curvas, as quais complicam o preparo das fôrmas e, algumas
vezes, fazem necessitar, construtivamente, de maiores es
pessuras que as necessárias em projeto.

E realmente, devido à complexidade de suas for
mas, nem todas as superfícies em casca são propícias em
termos de construção, sendo que o uso de algumas delas es
tá condicionado a motivos arquitetônicos e justificado tão
somente pela beleza plástica.

Por esse motivo, a economia dessas estruturas é
bastante dependente do sistema construtivo e novas for
mas não podem ser concebidas sem que haja o suporte de um
esquema eficiente de construção, pois, examinando o custo
dos materiais estruturais da superfície das cascas e compa
rando-o com o custo dos materiais acessórios - fôrmas, cim
bres, etc -, tem-se que este último é bastante superior e
que, portanto, deve-se pensar em como minimizá-lo para tor
nar essas estruturas, num todo, economicamente competi
vas.

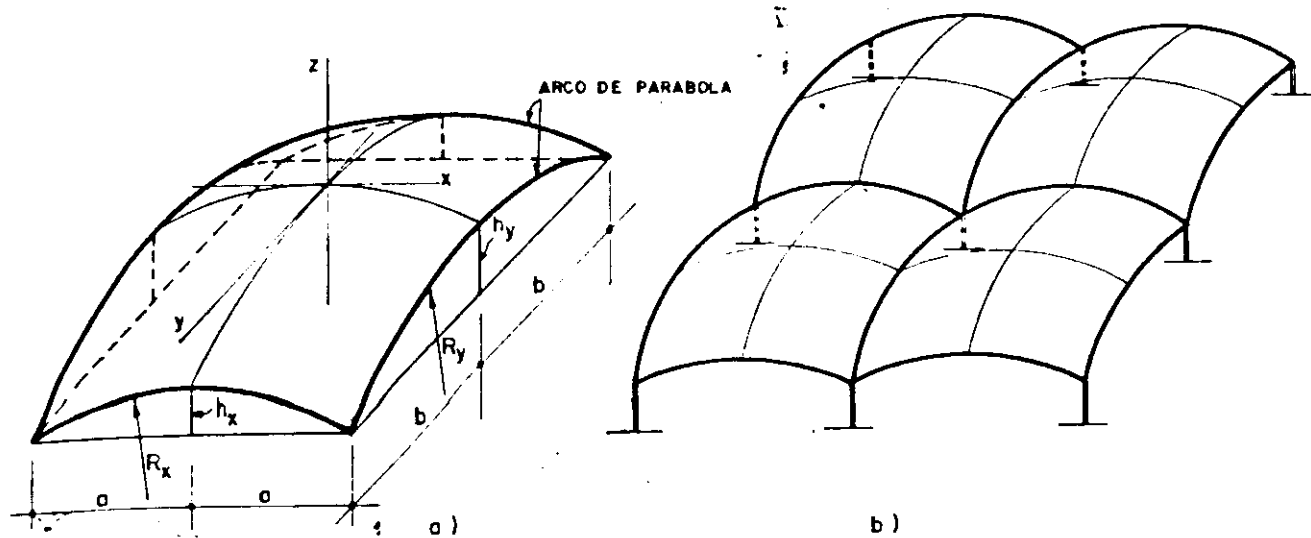
Para minorar esse problema, procurou-se sempre,
nas construções realizadas, criar e fazer evoluir técnicas
construtivas que permitam diminuir quantitativamente ou fa
zer uso mais racional do material de apoio provisório; exis
tem, assim opções construtivas que vão desde o uso de cim
bramento móvel às formas infláveis para superfícies de mais
complexa geometria.

Com isso surge, naturalmente, a idéia da pré-mol
dagem, que permite agilizar o processo de construção e daí
minorar o custo, principalmente quando existe a possibili

dade de produção em massa das peças com uso repetitivo dos moldes de concretagem, seja para a cobertura de grandes áreas ou num esquema industrial de produção de peças padronizadas, como é feito em alguns países. Com a pré-moldagem tem-se as vantagens inerentes como, através de um bom controle de qualidade, produzir peças de alto padrão com um mínimo de material e isso em boas condições de serviço. Dessa forma, encaramos a pré-moldagem aliada a todos seus reursos: fôrmas plásticas e metálicas, protensão, etc., como uma forma construtiva que possibilita incentivar o uso de estruturas em casca em nosso País.

Reunindo todas essas idéias expostas e acreditando que, superados certos obstáculos envolvendo cálculo e construção, as cascas poderão ser amplamente utilizadas, é que foi gerado este trabalho que tem como objetivo poder contribuir para a difusão de pelo menos uma dessas formas - os parabolóides elípticos -, divulgando sua teoria de cáluculo, apresentando aspectos de dimensionamento e construtivos (com ênfase à pré-moldagem) e fornecendo subsídios e estabelecendo critérios para o seu projeto.

O parabolóide elíptico é uma superfície que se destaca pela beleza e pela esbeltez, decorrente da maneira eficiente como reage às solicitações externas, sendo característico de seu comportamento apresentar-se essencialmente comprimido (o que de certa forma é evidenciado por sua geometria) quando submetido à ação de peso próprio e outros com distribuição semelhante. Assim, é uma estrutura interessante e viável para a cobertura de médias e grandes áreas ocupadas por terminais rodoviários, supermercados, fábricas etc. e também para funções outras que exijam estanqueidade, caracterizada pela ausência de fissuras, como os reservatórios, funcionando nestes ou como parede de contenção, formando reservatórios ondulados, ou simplesmente como fundo de reservatórios retangulares.



Descritos na bibliografia, existem com essas formas vários exemplos, notáveis por suas dimensões, pelo abatimento da superfície ou ainda pelo processo construtivo utilizado, sendo mostrados alguns deles nas figuras seguintes.

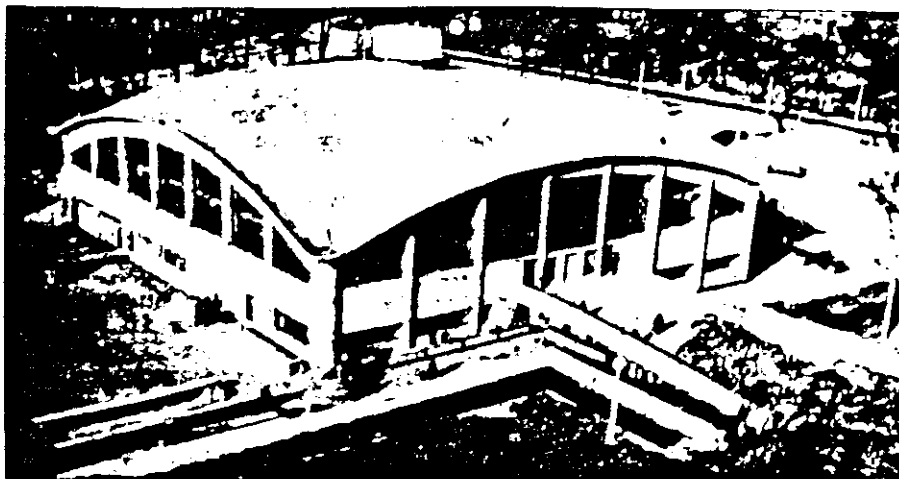
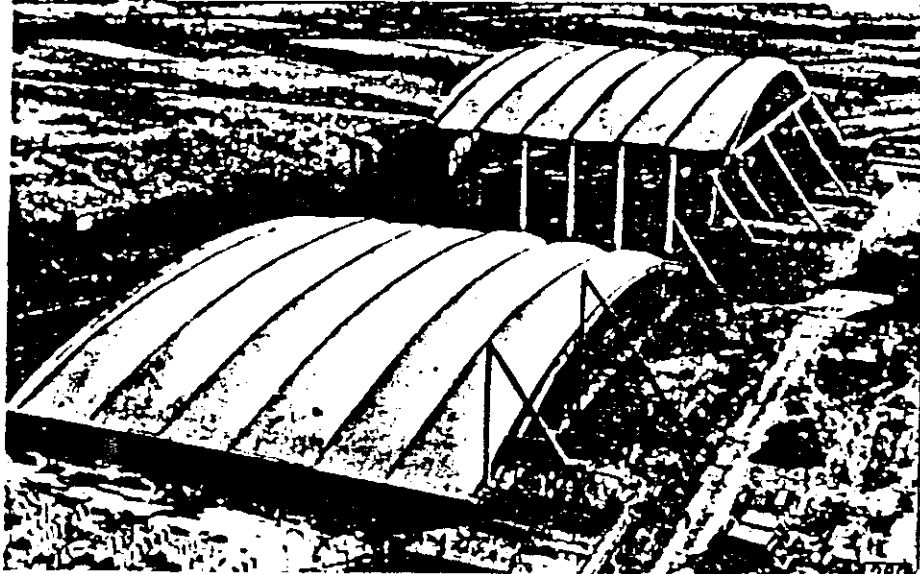


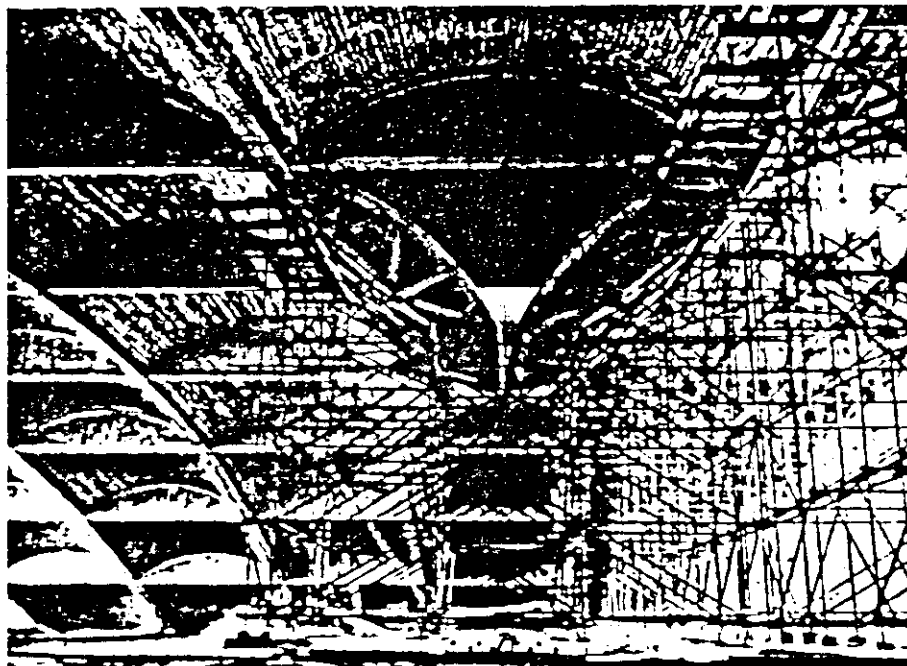
FIG. 2-(66)- Parabolóide elíptico em MINSK (URSS) - 40x40m

* As figuras estão numeradas por capítulo e a referência de onde foram extraídas, sempre que isto ocorrer, está indicada entre parênteses.

Na Fig. 3 são vistos aspectos da cobertura de um hangar em Marselha (França) de dimensões em planta de 58,80 x 101,00m; foi construída em módulos no solo, que foram transportados apenas verticalmente por macacos hidráulicos.



a)



b)

FIG. 3 (46)- Aspectos gerais de um hangar em Marselha.

Como outro exemplo, cita-se o de uma fábrica em Leningrado (URSS) coberta por duas calotas esféricas (cuja forma geométrica e de comportamento estático é semelhante ao do parabolóide e por isso são calculadas como tal) pré-moldadas, tendo cada uma delas dimensões em planta de 40 x 40m. Na Fig. 4 é mostrada essa cobertura e a forma de seccionamento de sua superfície.

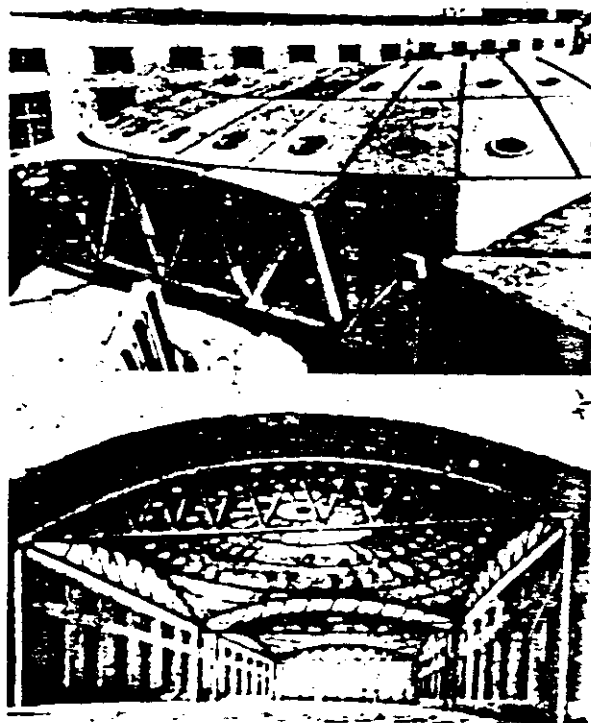


FIG. 4-(46)- Parabolóides de 40 x 40m em Leningrado (URSS)

Como pôde ser notado, os parabolóides e as calotas esféricas permitem cobrir grandes áreas através ou de vãos arrojados ou pela associação de painéis de pequeno ou médio porte, como o visto na Fig. 1. Por outro lado, a construção dessas estruturas é algo comprometida pelas dificuldades de formação da superfície de concretagem e pelo consumo de material provisório. Esses fatores significam pontos negativos na execução dessas coberturas; no entanto, a possibilidade de cobrir grandes vãos com as características vistas de geometria e de comportamento estrutural, faz com que se torne interessante pensar em soluções construti

vas que minimizem os gastos e o trabalho com o material de apoio provisório ou otimizar seu uso.

E como justamente um dos objetivos do trabalho ora apresentado consiste em pesquisar, apontar idéias e soluções que conduzam ao uso mais simples e racional do madeiramento gasto em fôrmas na construção dos parabolóides, permitindo que se aproveitem a forma esbelta dessas estruturas e suas características - trabalhar praticamente comprimida e isenta de flexões e sua alta resistência à flambagem -, que proporcionam economia no custo da obra pelo relativamente baixo consumo de aço e concreto por m^2 de área coberta. No entanto, como já comentado, essa economia estará afetada e até comprometida se o custo de fôrmas e de suas confecções for alto e ainda estiver aliado a dificuldades operacionais de fôrma e desforma e a um processo construtivo ineficiente ou problemático.

A utilização da pré-moldagem, como já evidenciado por diversos exemplos, minora sensivelmente os inconvenientes citados e a superfície permite, por sua geometria, o seccionamento em módulos que quando reunidos apresentam harmonia, ficando ainda as juntas entre eles favorecidas funcionalmente, em sua maior parte, pela natureza dos esforços a que estão solicitadas, fator que também favorece a pré-moldagem. No entanto, a maior contribuição que a pré-moldagem pode oferecer, ao nosso ver, é a possibilidade de, pela redução do custo da obra e pela facilidade construtiva, contribuir para a difusão dessas estruturas em nosso País.

2. CONTEÚDO

Após esta parte introdutória, a dissertação é composta no cap. II de um panorama geral das cascas que se prestam à pré-moldagem pelas características de suas solicitações internas ou por suas formas, apresentando-se repre

sentativas realizações neste campo, com particular atenção à parte construtiva; nesse mesmo capítulo faz-se breves comentários envolvendo aspectos de fôrmas, cimbres, concretagem e descimbramento para as estruturas em casca (monolíticas ou pré-moldadas), sendo que as recomendações que lá se encontram foram basicamente extraídas do ACI Formwork for Concrete (35) e do artigo de Tedesko (57) - "Construction Aspects of Thin-Shell Structures".

No capítulo III, dá-se, de forma sucinta, a teoria fundamental das cascas apoiada essencialmente em Billington (11), Flügge (25) e Gravina (28) em seqüência, com esse embasamento anterior, é apresentada a teoria das cascas abatidas, com o tratamento de Vlasov (62) objetivando o cálculo dos parabolóides. Após serem fornecidos esses subsídios, parte-se para o desenvolvimento do cálculo dos parabolóides cuja essência acompanha o texto de Bouma (12); são desenvolvidas as teorias de membrana e de flexão, constituindo-se aquela numa primeira aproximação para o conhecimento dos esforços solicitantes sobre o parabolóide, desprezando-se os esforços de flexão e torção. Cálculo mais rigoroso e amplo é obtido com auxílio da teoria de flexão, resumida num sistema de duas equações diferenciais que exprimem a compatibilidade de deslocamentos e o equilíbrio entre as ações e os esforços internos.

O procedimento adotado para o desenvolvimento das referidas equações favoreceu a automatização do cálculo, o que foi feito, resultando num programa implantado no IBM-1130 do CPD/EESC, cujos resultados numéricos para os esforços e deslocamentos se mostraram satisfatórios em confronto com resultados obtidos através de outras abordagens.

Concluindo o cap. III, fazem-se recomendações de cunho prático que visam correlacionar os resultados oriundos da teoria de flexão com os obtidos por outros projetistas em ensaios de modelos ou com processos de cálculo diferentes. É analisado também, como elemento auxiliar de projeto, a influência de parâmetros geométricos significativos na

distribuição dos esforços nos parabolóides. Finalmente, a analisa-se o problema de flambagem, os fatores que nela interveem e apresenta-se valores que servem como referência para a determinação da carga crítica de flambagem nessas estruturas.

A quarta parte compreende o estudo dos parabolóides pré-moldados, tratando-se da forma do seccionamento da superfície, formato e tipo de peças pré-moldadas, envolvendo aspectos de transporte, juntas, soluções e opções para estes e outros detalhes. A seguir é desenvolvido um exemplo de cálculo comentado para o parabolóide monolítico ou pré-moldado (com e sem nervuras laterais), onde são feitas as verificações necessárias - flambagem, equilíbrio, etc. - e o dimensionamento, por regiões de mesmo tipo de solicitação. No caso da estrutura constituída por peças pré-moldadas dotadas de nervuras no contorno, é exposta teoria sucinta de cálculo que considera a influência do enrijecimento propiciado por essas nervuras; esse cálculo foi baseado no texto de Apeland (7) no qual foram introduzidas modificações visando simplificar e acelerar o processo de obtenção dos esforços. É tratado também do cálculo dos apoios de borda do parabolóide.

O capítulo quinto trata exclusivamente dos experimentos realizados no Laboratório de Estruturas da EESC, que visa avaliar o comportamento de certo tipo de junta, possível de ser utilizada no parabolóide, e que é descrita e calculada sem maiores indicações no cap. IV. Esses experimentos foram planejados também com o intuito de complementar, em parte, o estudo sobre o parabolóide pré-moldado.

Na última parte, resumem-se de maneira conclusiva os capítulos anteriores, indicando-se temas a estudar em possíveis trabalhos posteriores com vistas a melhorar o estado atual de utilização dos parabolóides monolíticos ou pré-moldados.

Em anexo encontram-se o programa desenvolvido e recomendações gerais sobre cascas traduzidos de forma livre do documento "Concrete Shell Structures Practice and Commentary" preparado pelo ACI Committee 334, juntando-se a este algumas modificações introduzidas e encontráveis no ACI 318-77 na parte referente a "Shells and Folded Members" sendo que sua finalidade é estabelecer algumas normas e critérios para o projeto de estruturas em casca.

II - AS CASCAS PRÉ-MOLDADAS NAS COBERTURAS

1. CONSIDERAÇÕES GERAIS

Dentre as formas pré-moldadas mais utilizadas, como demonstram as construções nos locais onde essas estruturas são bastante difundidas, destacam-se aquelas cujas superfícies, seccionadas, originam peças de geometria simples e com poucas variações de formas e dimensões. Assim, as que se enquadram melhor nessas características são:

- as superfícies geradas por linhas retas ou superfícies regradadas: parabolóides hiperbólicos e os conóides;
- as superfícies de translação, que interceptadas por planos que os dividem geram trechos de igual curvatura: cascas cilíndricas, parabolóides elípticos;

- as superfícies de revolução que podem ser seccionadas em unidades congruentes, como as cúpulas de diferentes geratrizes;
- as superfícies formadas por planos: as cascas prismáticas.

Outras superfícies com geometria diferente das a cima, podem ser feitas pré-moldadas; foram destacadas apenas as mais correntes ou as mais viáveis para produção em ritmo industrial. A seguir será feita uma apresentação geral de coberturas pré-moldadas, incluindo seus aspectos geométricos, estruturais e construtivos, visando uma mostra de suas potencialidades. Os parabolóides elípticos se serão objeto de estudo detalhado nos capítulos posteriores.

2. CASCAS CILÍNDRICAS

Dentre as estruturas em casca, talvez as cilíndricas de cobertura sejam as mais difundidas na construção civil e também das mais analisadas em seus aspectos de cálculo e comportamento na ruptura; isto se deve, com a construção incentivando e fornecendo subsídios práticos para estudo teórico mais apurado, à sua forma de curvatura simples, que permite fácil confecção de fôrmas, posicionamento das armaduras e concretagem e, quando pré-moldada, simplifica também o levantamento das peças.

A superfície da casca cilíndrica é gerada a partir da translação de uma linha reta sobre um arco de círculo, de parábola ou outra curva. Normalmente sua estrutura é composta da superfície apoiada longitudinalmente em vigas e transversalmente em tímpanos ou arcos (atirantados ou não).

A relação entre o vão longitudinal e o raio da diretriz - L_1/r - é das mais variadas, o que ocasiona comportamentos diferentes conforme seja a casca mais ou me

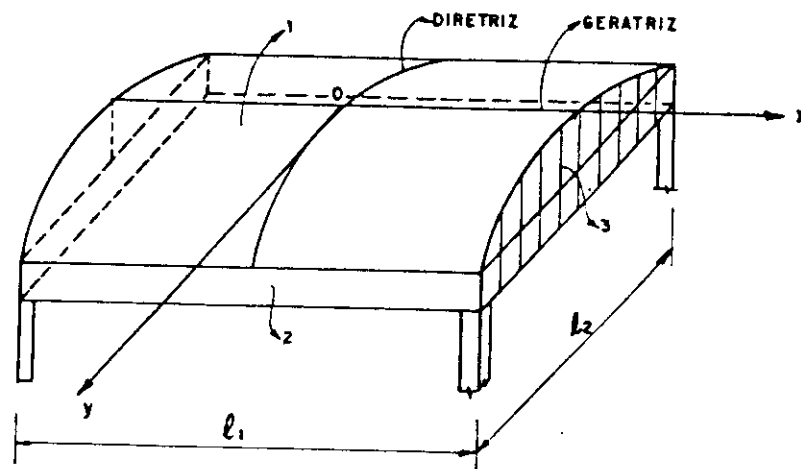


FIG. 1 - Casca cilíndrica

- 1 - superfície da casca
- 2 - viga longitudinal
- 3 - apoio transversal; tímpano

nos longa. De acordo com Gibson (11), e existem outras classificações, para as cascas cilíndricas longas tem-se a relação - $\ell_1/r \geq 2,5$ - para as intermediárias - $0,5 < \ell_1/r \leq 2,5$ - e para as curtas - $\ell_1/r \leq 0,5$. As cascas longas são solicitadas na direção longitudinal preponderantemente por esforços normais de compressão e transversalmente por esforços de flexão e têm as vigas de apoio geralmente protendidas; as cascas curtas são solicitadas de forma oposta, existindo maiores flexões segundo a direção x e maiores compressões segundo a direção dos "arcos". Em termos de pré-moldagem, essas características irão influenciar a forma de seccionar a superfície e o tipo de junta a ser executada entre as peças.

As peças pré-moldadas para as cascas consideradas longas podem assumir dimensões diversas, sendo que a opção entre uma e outra depende basicamente da maquinaria de transporte envolvida. Economicamente, pela rapidez e facilidades de montagem é mais interessante o uso de peças que cubram, sozinhas, maior área possível e isto, para as cascas cilíndricas tende ao uso de peças inteiriças, como a da Fig. 2; esse tipo de peça é muito usado e fabri

cado com dimensões normalizadas em diversos países (ver Mokk-
(45), com vãos transversais de 3,50 a 5,00m e vãos longi-
tudinais de 7,50 a 15,00m, em concreto armado, com a super-
fície da casca compondo com os apoios uma só estrutura.
Para vãos superiores a 15,00m, pode ser conveniente a pro-
tensão das vigas longitudinais, o que melhora o comporta-
mento destas e indiretamente o da superfície da casca.

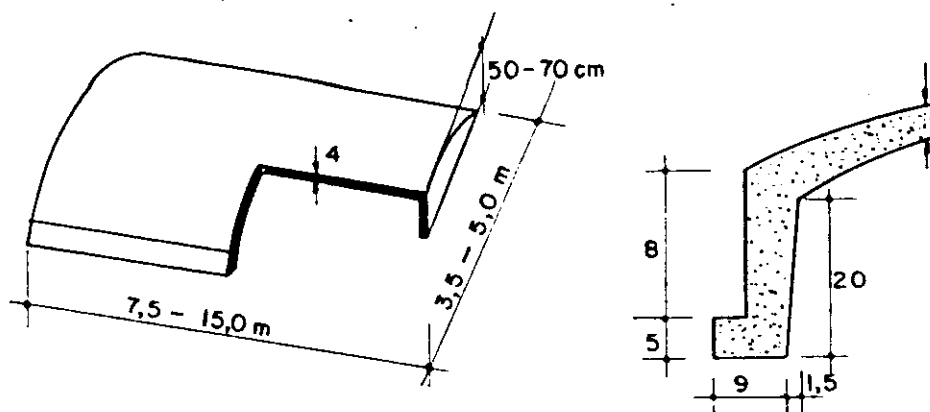
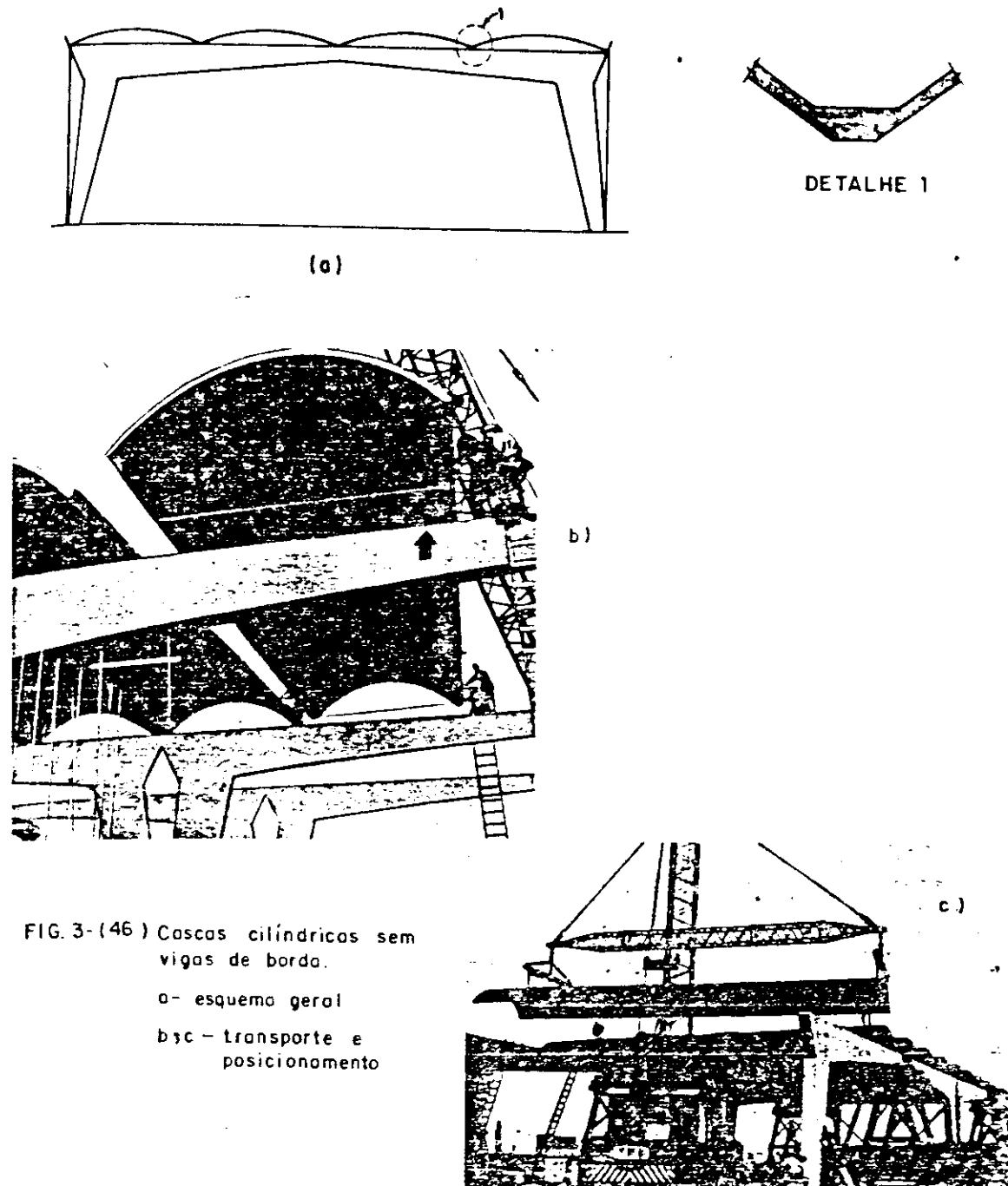


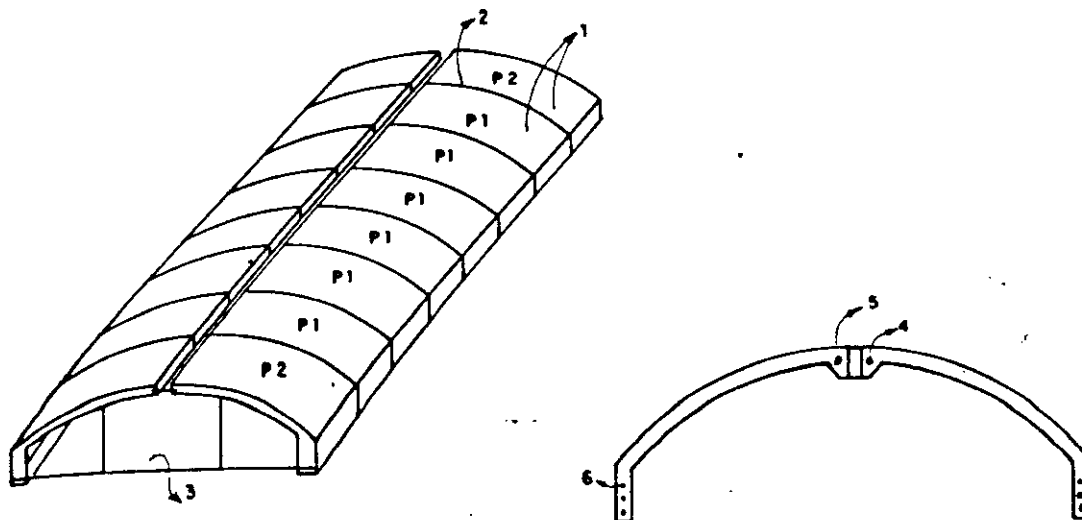
FIG. 2 - Casca cilíndrica pré-moldada em concreto armado.
Dimensões típicas. Detalhe casca apoio.

Quando a cobertura é composta de várias superfí-
cies justapostas pode-se prescindir das vigas longitudi-
nais e fazer-se tão somente um espessamento da superfície
em suas bordas; necessita-se, no entanto, de tirantes pro-
visórios (substituindo os elementos transversais) durante
o levantamento e até que sejam posicionadas todas as peças,
a partir daí, soltos os tirantes, os esforços horizontais
se auto-equilibram.

O levantamento dessas peças é feito pelos pontos
finais de apoio, (Fig. 3.c), não se constituindo em proble-
ma. Com o uso desses módulos ganha-se, evidentemente, em
tempo de construção e na otimização do trabalho de execu-
ção; o inconveniente é o equipamento de transporte exigido
para essas peças, o que torna essa opção um tanto quan-
to limitada.



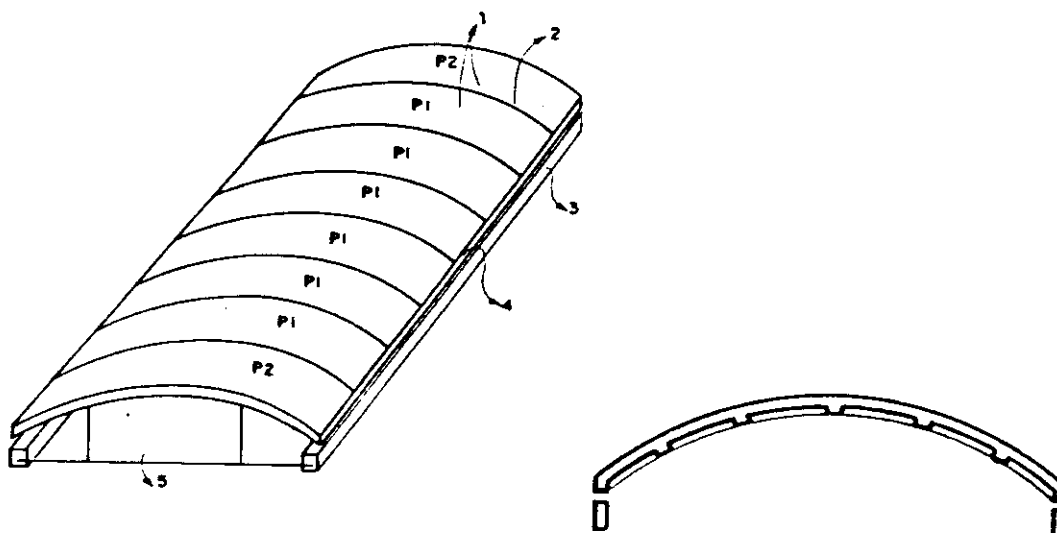
Outras possibilidades para as peças prẽ-moldadas das cascos cilíndricos longas são as vistas na Figs. 4 e 5, nas quais se consegue boa padronização na prẽ-fabricação e são atenuados sensivelmente os problemas com o transporte.



- Peças com o apoio correspondente do apoio um só módulo.

- 1 - peças típicas; P1 - peças intermediárias; P2 - peças extremas
- 2 - junta a ser posteriormente comprimida
- 3 - tímpano atirantado
- 4 - bainha para protensão longitudinal
- 5 - chapa metálica para união transversal das peças
- 6 - bainhas para protensão longitudinal

FIG. 4 - Casca cilíndrica longa pré-moldada



- peças independentes do apoio

- 1 - peças típicas; P1 - peças intermediárias; P2 - peças extremas eventualmente protendidas.
- 2 - junta executada com chapa metálica ou trespasses das armaduras.
- 3 - viga de bordo protendida.
- 4 - conexão entre a peça pré-moldada (com entalhes laterais) e a viga.
- 5 - tímpano atirantado.

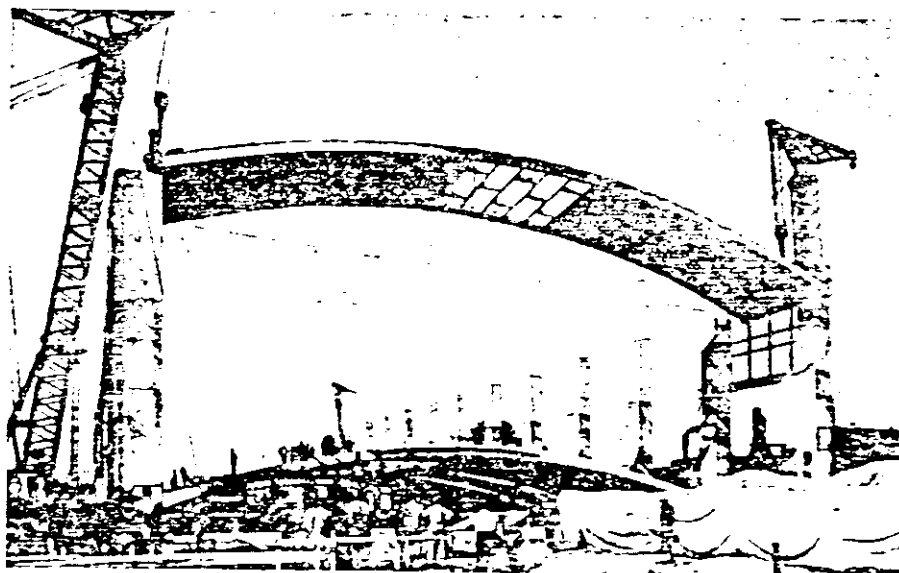
FIG. 5 - Casca cilíndrica longa pré-moldada

No primeiro caso, a cobertura é seccionada de forma que a superfície da peça pré-moldada componha com a parte correspondente do apoio um só módulo que, a seguir, é conectado aos demais por protensão longitudinal. executa da nas vigas de borda e superfície. Transversalmente, as peças são ligadas por trespasse ou soldagem das armaduras oriundas de duas peças vizinhas.

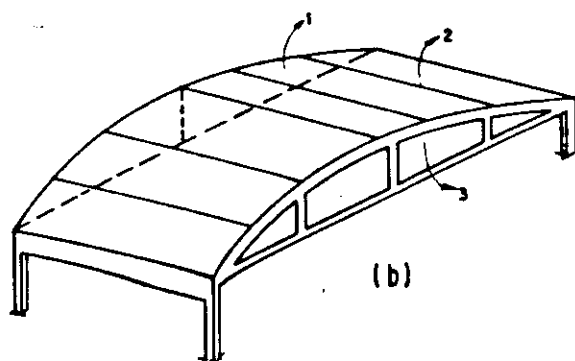
No segundo caso, as peças pré-moldadas são feitas separadas dos apoios (geralmente protendidos) e enrijecidas por nervuras longitudinais e também por espessamento da superfície nas proximidades das bordas. As juntas entre as peças são feitas nas duas direções, por trespasse ou solda das armaduras e, entre as peças e os apoios, executam-se também entalhes com a finalidade de assegurar melhor comportamento às solicitações que, nessas junções, são preponderantemente de cisalhamento.

Essas duas formas anteriores são construídas sistematicamente, com geometria definida e normalizada, em alguns países, o que, de certa maneira, atesta o grande uso que se faz dessas coberturas.

Nas cascas cilíndricas curtas, evitam-se juntas na direção transversal, o que faz utilizar módulos inteiros ou de peças resultantes do seccionamento da superfície



a) módulo inteiro pré-moldado



- 1- peça pré-moldada que dependendo da discretização da superfície pode ser até plana.
- 2- junta executada por traspasso das armaduras.
- 3- tímpano atirantado.

FIG. 6 (46) Cascas cilíndricas curtas pré-moldadas

por planos normais longitudinais. Essas duas soluções são mostradas na figura anterior, sendo que tanto uma como outra proporciona boa padronização na construção e, novamente, a escolha entre uma e outra forma irá depender do equipamento de transporte.

Com esse breve comentário acerca das cascas cilíndricas, pode-se constatar a simplicidade da pré-moldagem para essas coberturas, possibilitada por suas formas, e conhecer opções construtivas que não são as únicas, mas que dão ideia do geral.

3. COBERTURAS PRISMÁTICAS E PIRAMIDAIS

Embora seja frequente reservar o nome de casca para as estruturas de folha curva, é justificável que as folhas poliédricas sejam consideradas como cascas, pela proximidade do comportamento estrutural (pense-se, por exemplo, na semelhança de comportamento das cascas prismáticas e cilíndricas de dimensões próximas).

Suas superfícies são formadas pela associação de diversas placas inclinadas ou horizontais. Longitudinalmente, essas placas têm suas faces laterais dispostas uma con

tra a outra e a junção entre elas é articulada ou rígida; transversalmente, nos extremos e, eventualmente, em outras seções intermediárias, são colocadas travessas ou tímpanos (pelo menos em algumas fases construtivas), cuja finalidade é minimizar deformações. Vêem-se abaixo, algumas seções transversais típicas dessas superfícies.

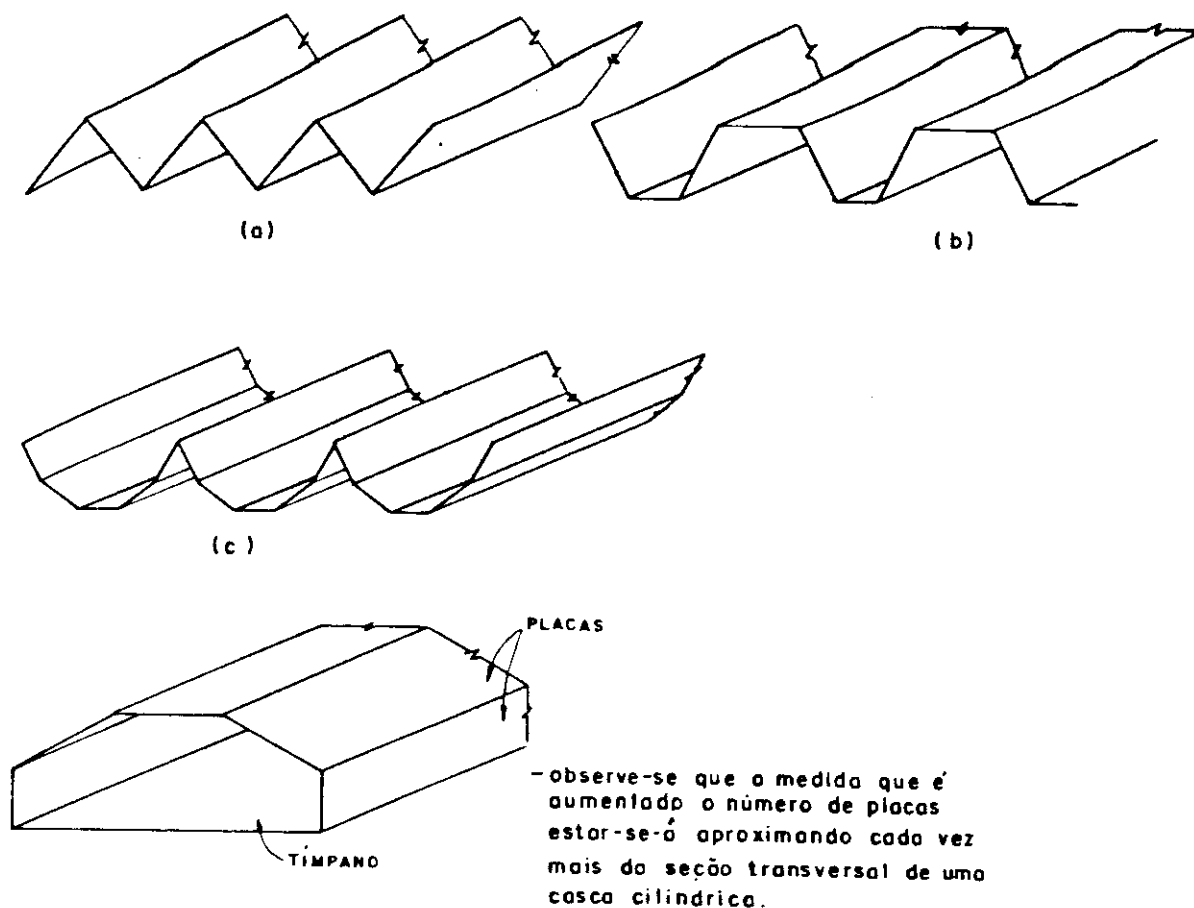


FIG. 7 - Seções típicas das cascas prismáticas

O uso dessas estruturas para a cobertura de grandes vãos é conveniente, pois ao lado de seu comportamento similar ao das cascas cilíndricas, tem-se a facilidade construtiva de suas formas, que são planas. Frequentemente são pré-moldadas e a forma de subdivisão da superfície depende essencialmente de suas dimensões e dos recursos construtivos disponíveis. Para vãos longitudinais médios - 10; 15m - e seções transversais de até 2m, as coberturas do tipo visto em 7.a e 7.b são pré-moldadas como peças inteiriças em concreto armado.

À medida que crescem os vãos recorre-se à proten
são como forma de assegurar boas condições de serviço para
essas "vigas" de cobertura ou também para monolitizá-las
quando seccionadas por cortes transversais. Dessa forma,
foram construídas peças inteiriças como as da Fig. 8, ou
em módulos, como os da Fig. 9.

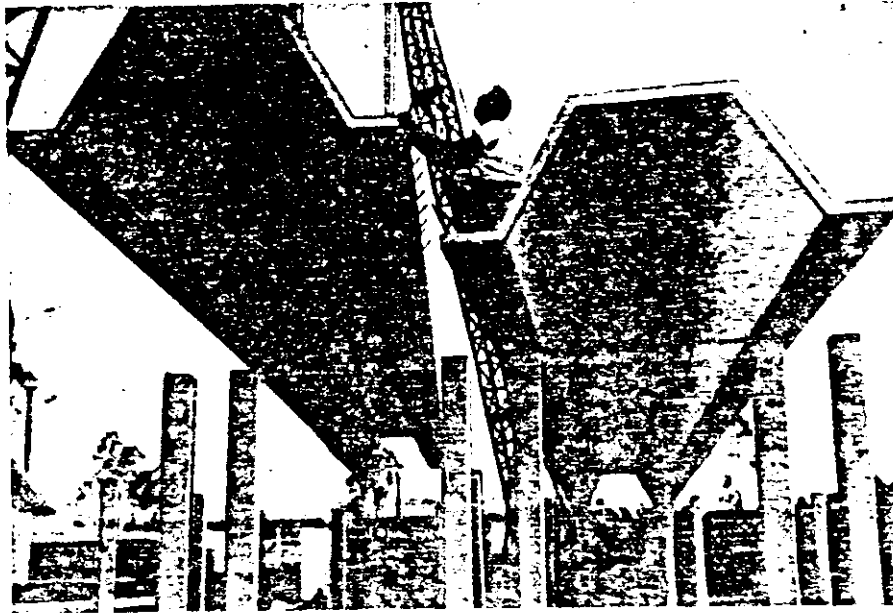


FIG. 8 - (46) Coberturas prismáticos protendido - 2,25 x 22m

Pelos exemplos nota-se que as coberturas prismá
ticas permitem vencer vãos relativamente grandes, porém, i
rão necessitar de equipamento de transporte com bons recur
sos de carga e alcance, o que onera o custo da obra; por
outro lado, se forem de dimensões mais modestas, sofrem a
concorrência direta das vigas-calhas de fibro-cimento, de
uso corrente no mercado.

Tem-se então que, financeiramente, o uso dessas
coberturas está quase que restrito somente pelas imposições
arquitetônicas (pelas possibilidades de diferentes arran
jos para a seção transversal) e cremos que das melhores

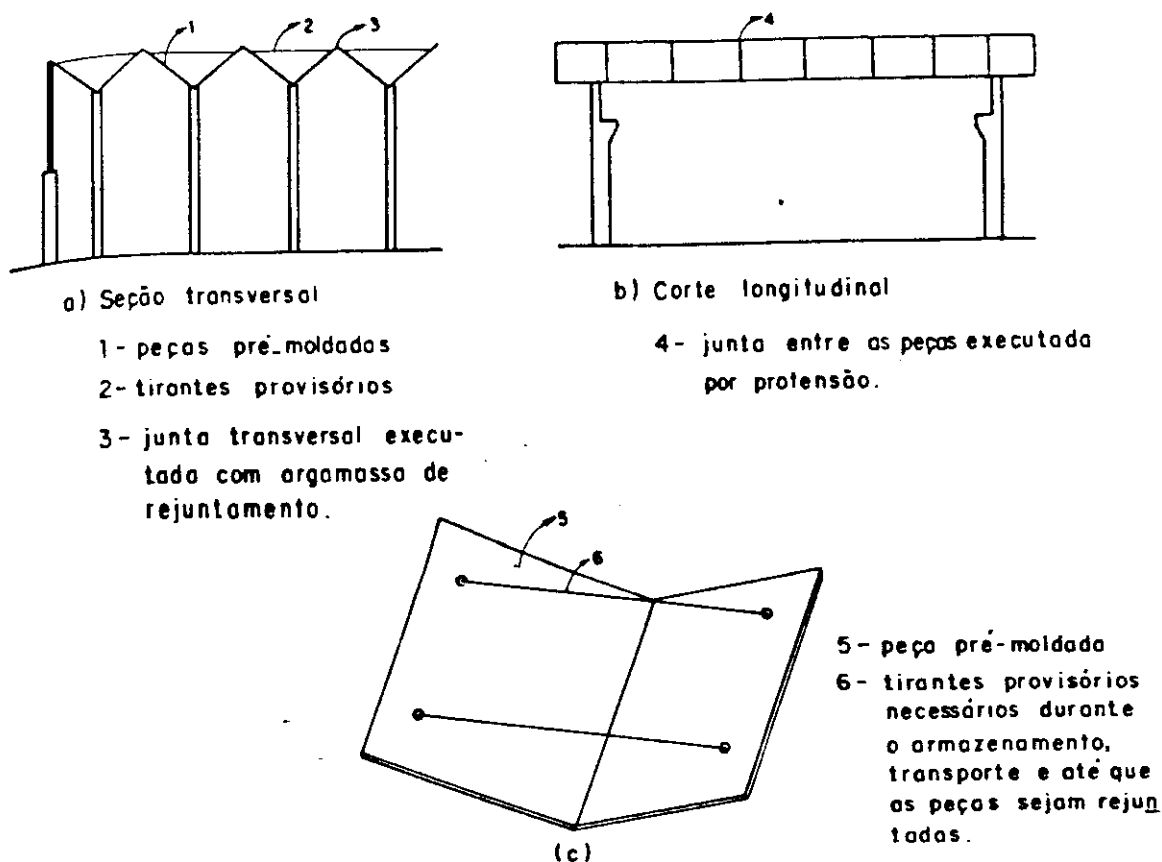
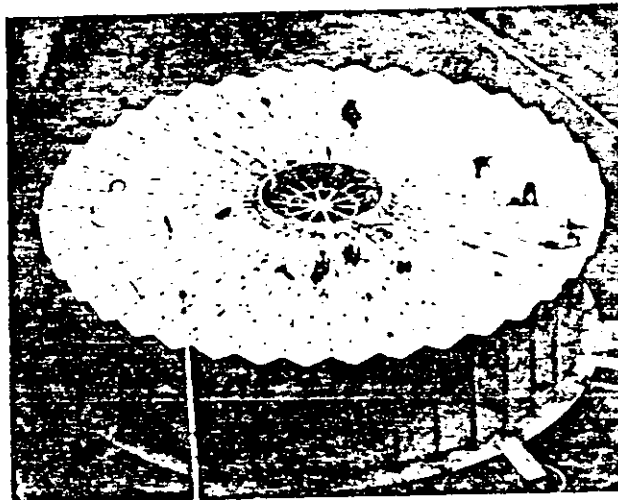


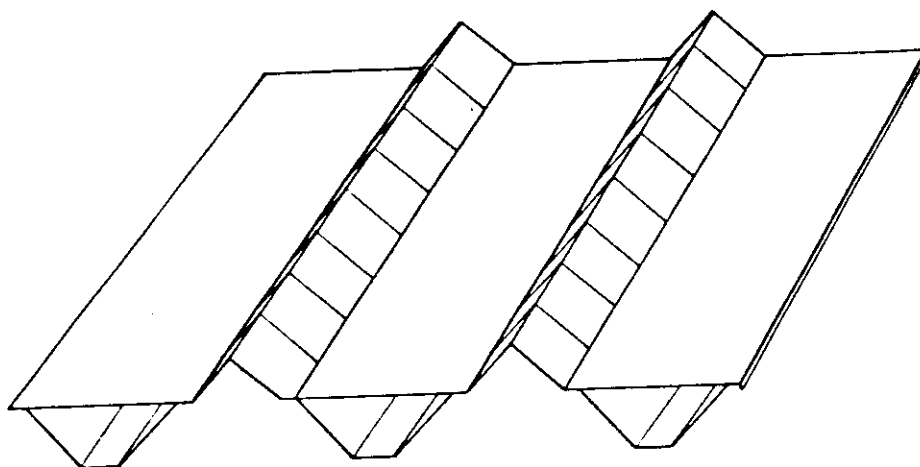
FIG. 9 - Coberturas prismáticas seccionada por cortes transversais.

soluções, evitando o transporte de grandes peças, é construí-las pela associação de módulos menores, unindo-os por protensão (esquema da Fig. 9), a qual será melhor aproveitada quanto maior for o vão a vencer. Outra solução interessante é usá-las simplesmente como vigas-suporte de elementos vedantes tendo-se neste caso, bom aproveitamento de material para a cobertura de grandes áreas. Podem ser utilizadas também como elementos de cobertura para grandes depósitos circulares, sendo que, neste caso, a secção é variável e podendo (a depender do vão) ser protendidas.

Construídas pré-moldadas, existem também as coberturas piramidais e as que, algumas vezes, podem ser visualizadas como formas derivadas das prismáticas, pela inclinação dos tímpanos extremos destas. Duas dessas formas são vistas na Fig. 11, juntamente com o seccionamento das superfícies e as peças pré-moldadas típicas

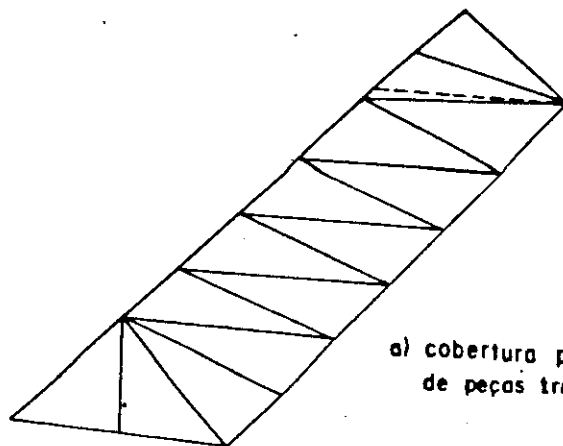


b) cobertura de depósito circular

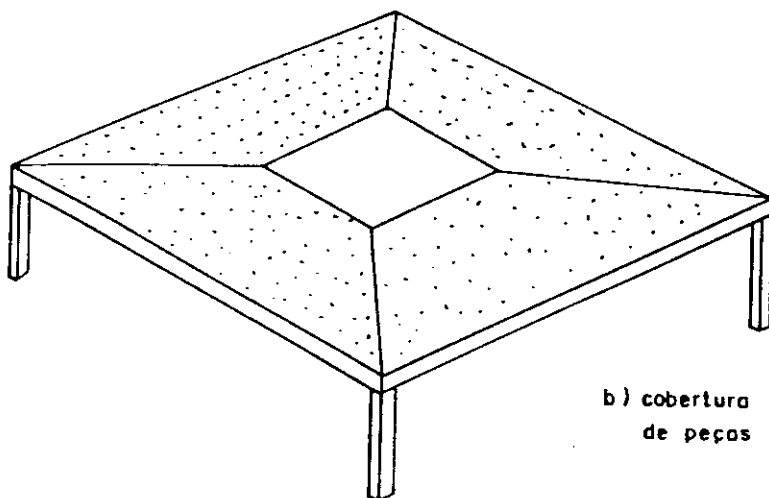


a) Cobertura prismática como elemento suporte de outros vedantes

FIG 10 -(38)- Outras possibilidades de uso das peças prismáticas.



a) cobertura piramidal composta de peças triangulares.



b) cobertura piramidal composta de peças trapezoidais.

FIG. 11 - Coberturas piramidais

4. PARABOLÓIDES HIPERBÓLICOS

Os parabolóides hiperbólicos são superfícies de dupla curvatura das mais versáteis e que oferecem amplas possibilidades para a cobertura de pequenos e grandes vãos com diferentes arranjos geométricos; podem simplesmente ser elementos de cobertura, como também atuar como elementos principais de sustentação de pisos ou de cobertura e, ainda, dada sua versatilidade, como passarelas e pontes rolantes. A geometria dos parabolóides hiperbólicos é sucintamente explicitada a seguir.

Considere-se o retângulo $AOB'C$ situado no plano OXY e que seja dado ao ponto B' um deslocamento c vertical e no sentido de OZ , formando a figura limitada por $OABC$.

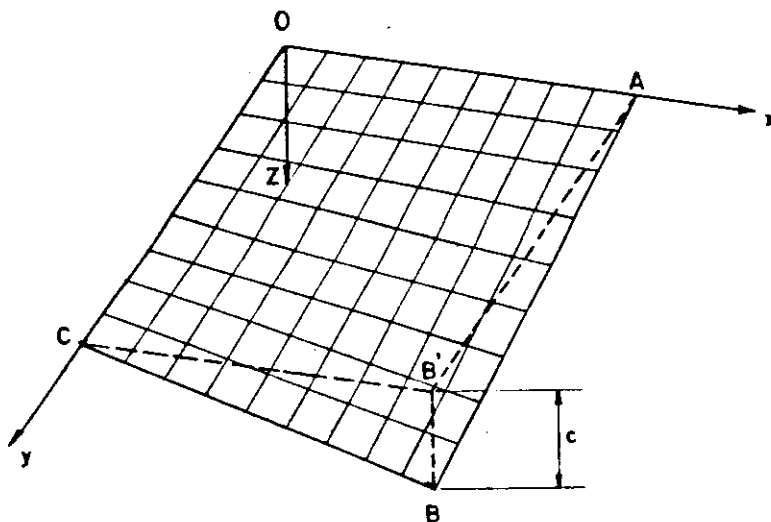


FIG. 12- Superfície do parabolóide hiperbólico limitado por linhas retas.

Se uma reta paralela a OA se movimentar ao longo de OY , de forma a estar sempre em contato com as linhas OC e AB e, do mesmo modo, uma reta paralela a OC se movimentar ao longo de OX sempre em contato com OA e CB , teremos ao final uma superfície cujo esqueleto é um emaranhado de retas, definida pela equação $Z = \frac{c}{ab} xy$, e denominada parabolóide hiperbólico, no caso limitado no contorno, por linhas retas.

Variantes da forma da Fig. 12 são vistas a seguir.

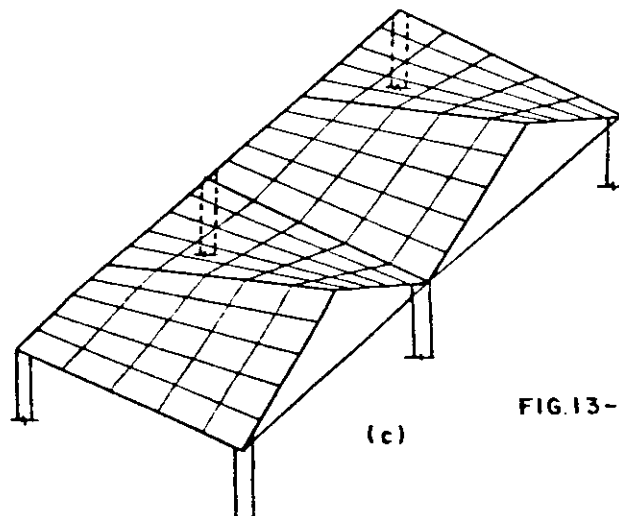
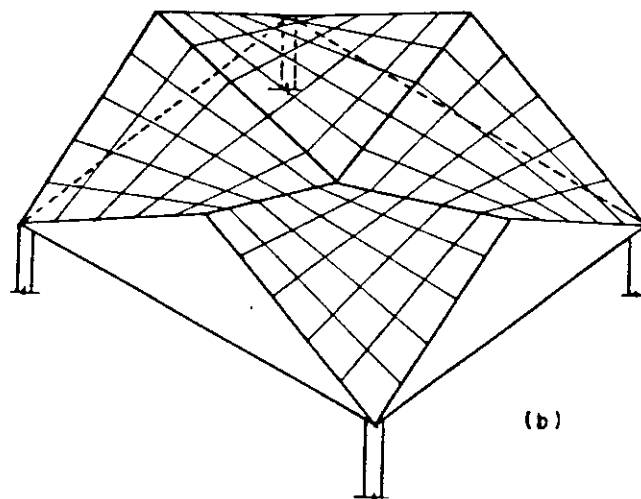
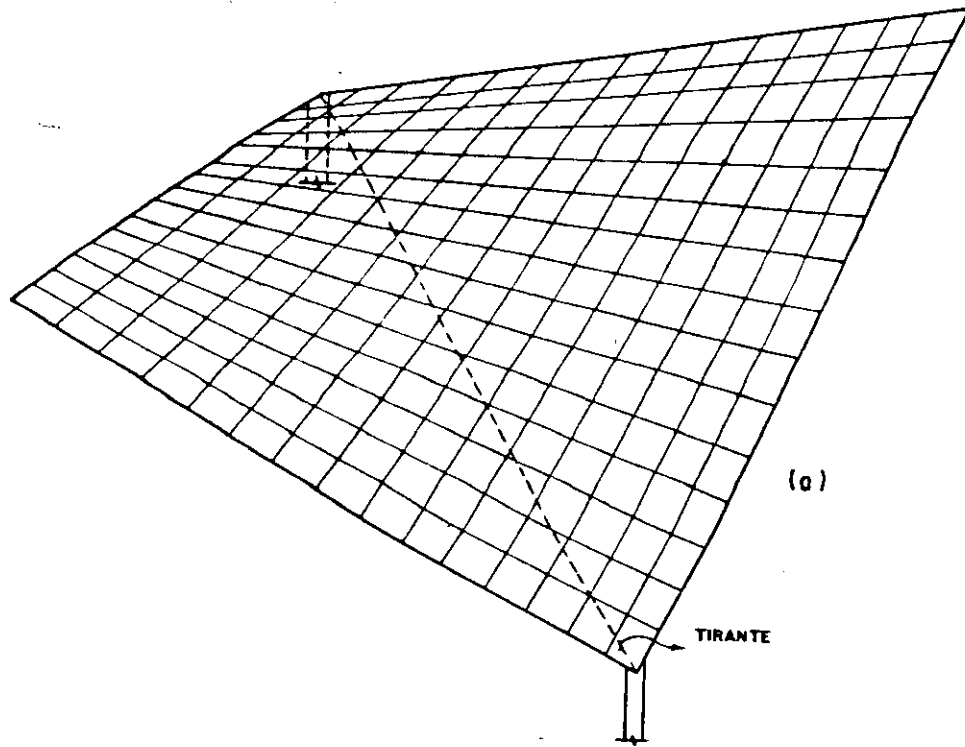


FIG.13- Parabolóides
hiperbólicos.

Percebe-se que por serem regradas, as superfícies das Figs. 12 e 13 são facilmente formáveis e por linhas retas, o que simplifica deveras a confecção de fôrmas, inclusive quando não se trata de pré-moldagem e favorecem a esta, como será visto.

Se a superfície da Fig. 12 for seccionada por quatro planos verticais paralelos e inclinados, dois a dois, de $+\alpha$ e de $(90^\circ + \alpha)$, com OX, tem-se a superfície da Fig. 14, que é a forma mais frequente com que os parabolóides são usados pré-moldados. Neste caso, são comumente chamados de elementos HP (Hyperbolic paraboloids) e a geometria de sua superfície pode também ser visualizada como formada pela translação de uma parábola sobre outra, ambas situadas em planos verticais e tendo entre si concavidades opostas.

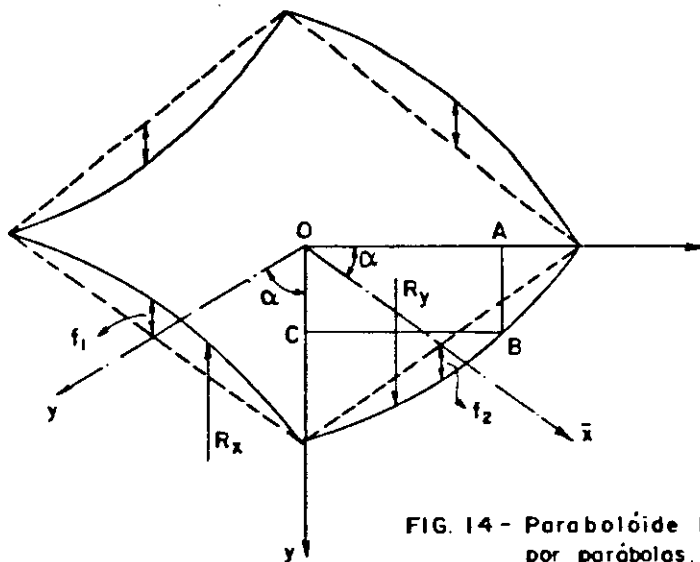


FIG. 14 - Parabolóide hiperbólico circundado por parábolas.

Os elementos HP normalmente são pré-moldados em grandes módulos, não sendo comum subdividi-los em peças menores. Basicamente, os esquemas estruturais com que a parecem são os seguintes:

- elemento HP em concreto armado, atirantado ou não longitudinalmente;
- elemento HP em concreto armado ou protendido enrijecido por nervuras longitudinais;
- elemento HP protendido.

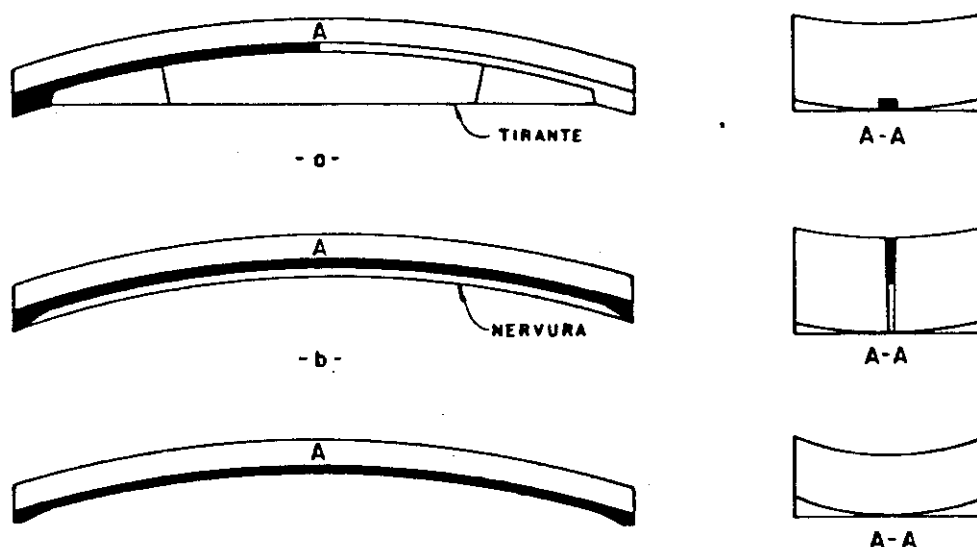


FIG. 15-(46)- Elementos HP -
a- em concreto armado ; atirantado
b- em concreto armado ou protendido ; nervurado
c- em concreto protendido.

Segundo Sweenath (55) o uso dos módulos HP em concreto armado é economicamente viável até vãos de 10m, a cima dos quais e até 24m, é preferível fazê-los protendidos com larguras de 2 a 3m, embora tecnicamente seja possível a atingir maiores dimensões. Serão tratados em detalhe os elementos HP protendidos.

Como peça pré-moldada, foi inicialmente desenvolvida na Alemanha, de acordo com os projetos de U.V. Silberkuhl, e a partir daí, difundido no mundo inteiro inclusive no Brasil, onde é fabricada pela For Beton (26). Vêem-se a diante várias opções de utilização para essas peças, existindo também outras soluções não menos criativas.

Necessitando, então, para vãos superiores a 10 m, de uma protensão longitudinal de combate às solicitações oriundas do peso próprio e sobrecargas, esta é executada com fios ou cabos retos dispostos à altura da seção média e paralelos às linhas geradoras da superfície (cujas inclinações são $\tan \alpha = \pm R_y/R_x$) em relação ao eixo OX). Com os fios sendo retos, apesar da curvatura longitudinal do HP, as perdas

por atrito são minimizadas e a obtenção e análise dos efeitos da protensão é simples já que não são introduzidas flexões, sendo daí uma protensão centrada.

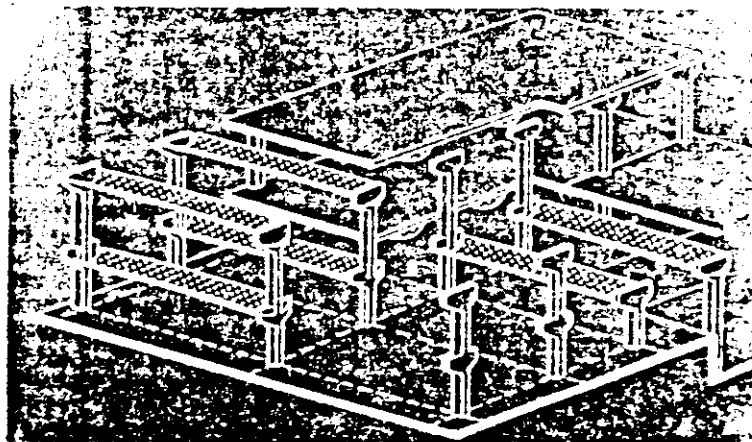
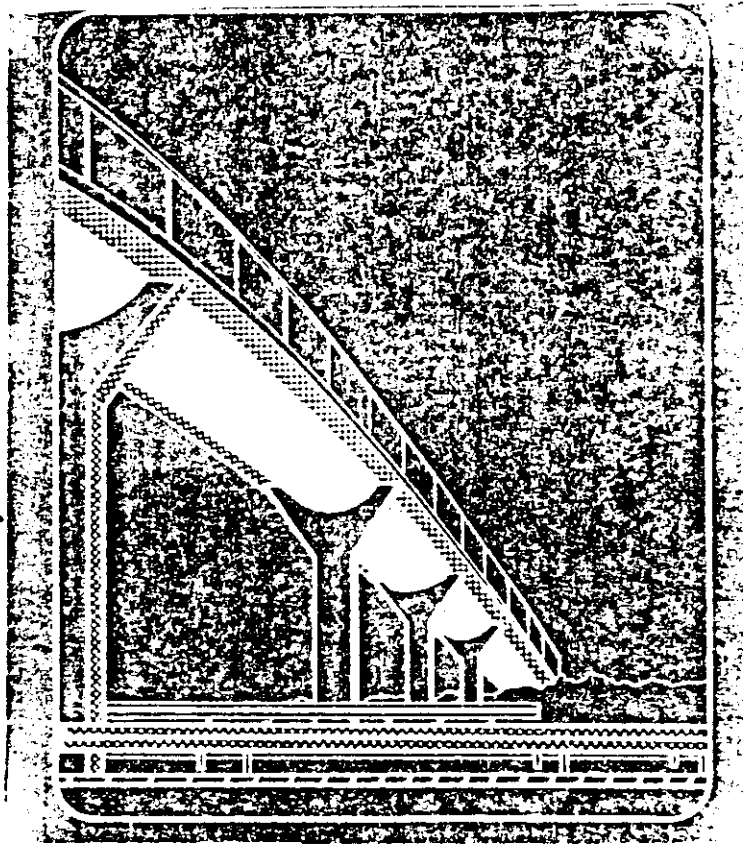


FIG. 16- (26) Opções de uso dos elementos HP - a - passarela
b - elemento suporte de estruturas de múltiplos andares.

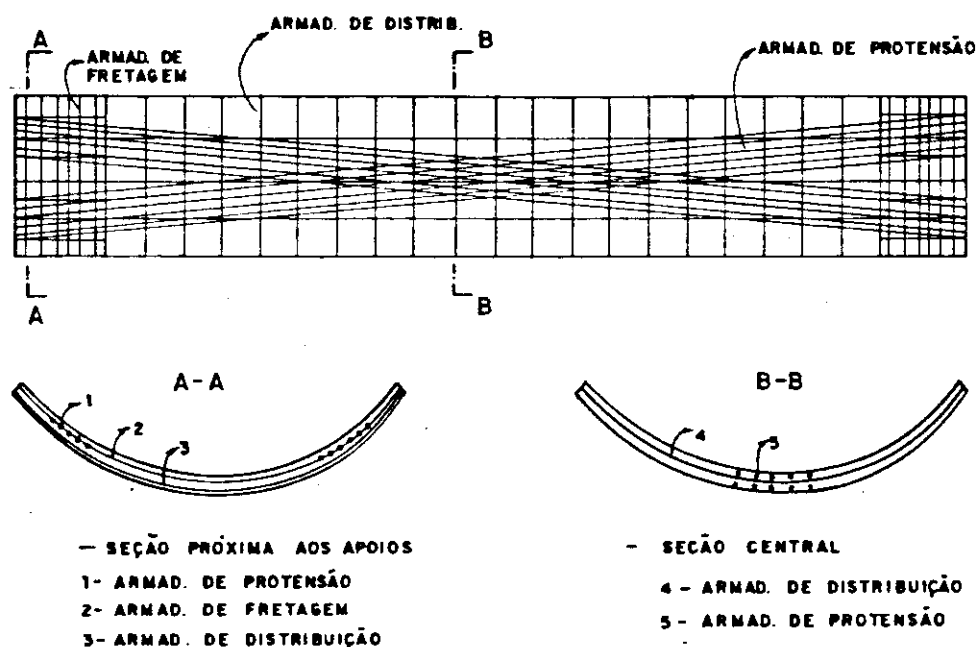


FIG. 17-(55)-Elemento HP protendido

A sequência construtiva dos elementos HP, estabelecida a partir de exemplos de obras executadas como a descrita no "Indian Concrete Journal", Jan. 1980, é simples e basicamente é a seguinte: dispõem-se sobre a fôrma (de concreto, alvenaria, ou metálica), que acompanha a curvatura do parâmetro inferior do HP, as armaduras frouxas - normalmente telas -, a de fretagem e a de protensão; a seguir esta é estirada por uma das extremidades e ancorada provisoriamente, como a da outra extremidade, numa placa ou bloco de borda como vista na Fig. 18.a,b. Executado o estiramento dos fios, processa-se a concretagem (concreto de f_{ck} em torno de 450 kgf/cm^2) e, após alguns dias, se a peça não for submetida a processo acelerado de cura, e de acordo com a evolução da resistência do concreto, a armadura de protensão é solta das placas de ancoragem passando a atuar sobre a peça. Nesse estágio o elemento HP pode ser retirado do molde de concretagem e curado por mais alguns dias até ter condições de suportar, sem maiores consequências, as sobrecargas de serviço ou permanentes.

A retirada da peça da fôrma e o seu levantamento até a posição definitiva podem ser feitas com auxílio de ganchos inseridos no interior da peça, procurando-se simular o quanto possível, durante essas operações, as reais condições de suporte que irá ter na posição final. Vêem-se, nas figuras seguintes, ilustrações da sequência construtiva descrita.

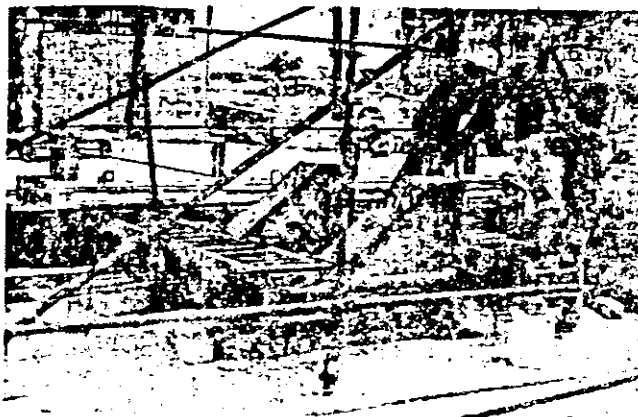
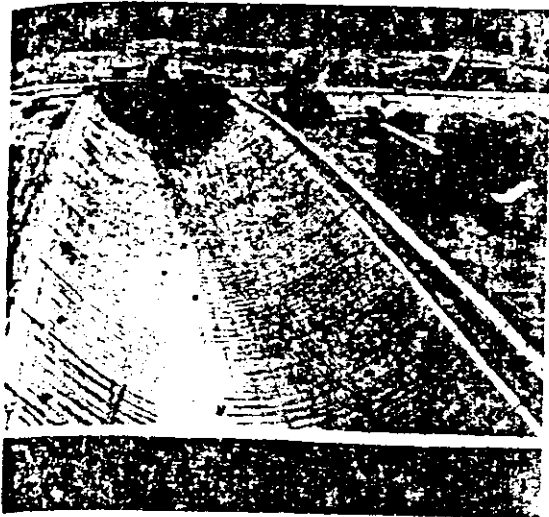


FIG. 18-(55)-Algumas fases construtivas

- a- armaduras colocadas sobre o molde.
- b- concretagem da casca.
- c- tensionamento dos fios.

A conexão entre os elementos HP não oferece dificuldades, podendo simplesmente dispor-se as peças justapostas e o espaço entre as adjacentes ser preenchido com domos ou elementos pré-moldados planos ou curvos, que irão permitir boa iluminação ou ventilação interior. Outra opção é rejuntar as peças vizinhas com argamassa.

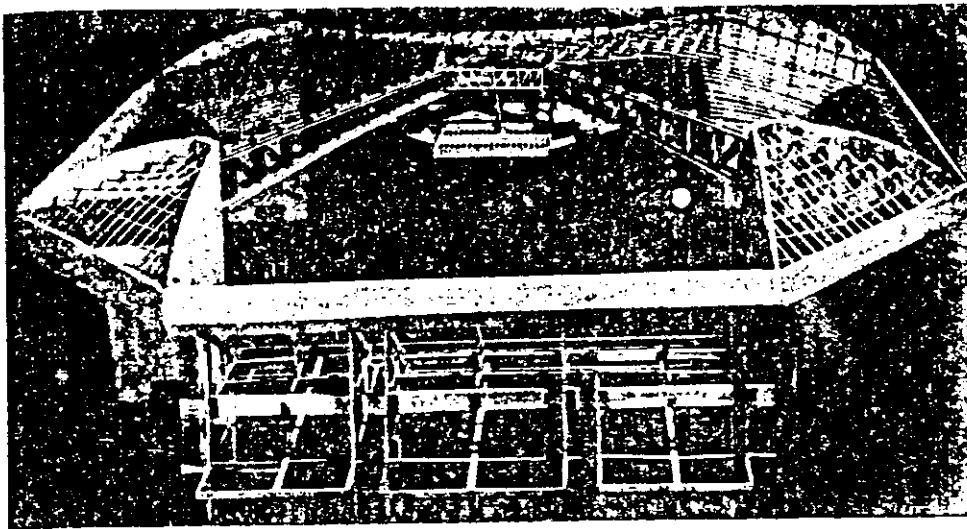
Outras formas (que não a do elemento HP) de coberturas em parabolóides hiperbólicos já foram construídas pré-moldadas, formando superfícies que se destacam pelo arrojado e criatividade, como por exemplo, a estrutura de cobertura do Ginásio Municipal San Juan em Porto Rico, constituída pela associação de quatro seções do tipo visto na Fig. 19. A descrição sumária dessa estrutura é feita a seguir, de acordo com o extraído do ACI - Journal/Nov.-73, e o seu esquema estrutural básico e a geometria da superfície são os vistos adiante.

A superfície é inicialmente formada por cabos parabólicos côncavos e convexos defasados de 90° , portanto, uma grelha espacial de cabos. Aqueles com curvatura positiva são ancorados nas treliças metálicas, que fazem o papel de vigas de borda para os parabolóides, e nas vigas do contorno; os de curvatura negativa são ancorados nas treliças ou nas paredes de canto em formato de L. Nas seções de canto o posicionamento dos cabos é semelhante.

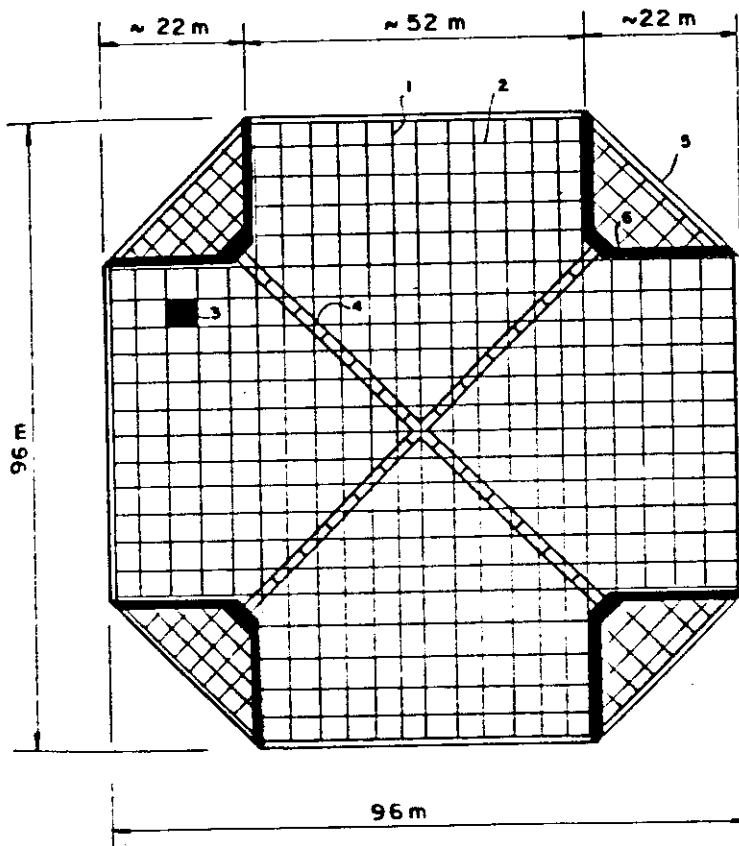
Formada a grelha de cabos, processou-se, em etapas e de forma simultânea e simétrica, o estiramento dos cabos côncavos da região central e dos convexos das regiões de cantos; com esse proceder visa-se equilibrar ou diminuir os esforços sobre as paredes em L, sendo que para isso as superfícies de cantos (concretados em bloco) foram feitas com espessuras bem superiores às peças pré-moldadas da região central. A seguir, os cabos côncavos das regiões dos cantos foram estiradas e colocadas as peças pré-moldadas na região central, preenchendo os vãos ($\sim 0,74m^2$) entre os cabos; foram dispostos com auxílio de guinchos e de forma simétrica.

A ligação entre as peças pré-moldadas efetuou-se através de argamassa de rejuntamento, sendo que para qualquer carga adicional atuante sobre essa cobertura, esta estará trabalhando como um parabolóide hiperbólico monolítico.

Através da bem sucedida execução desse projeto,



a) Elevação

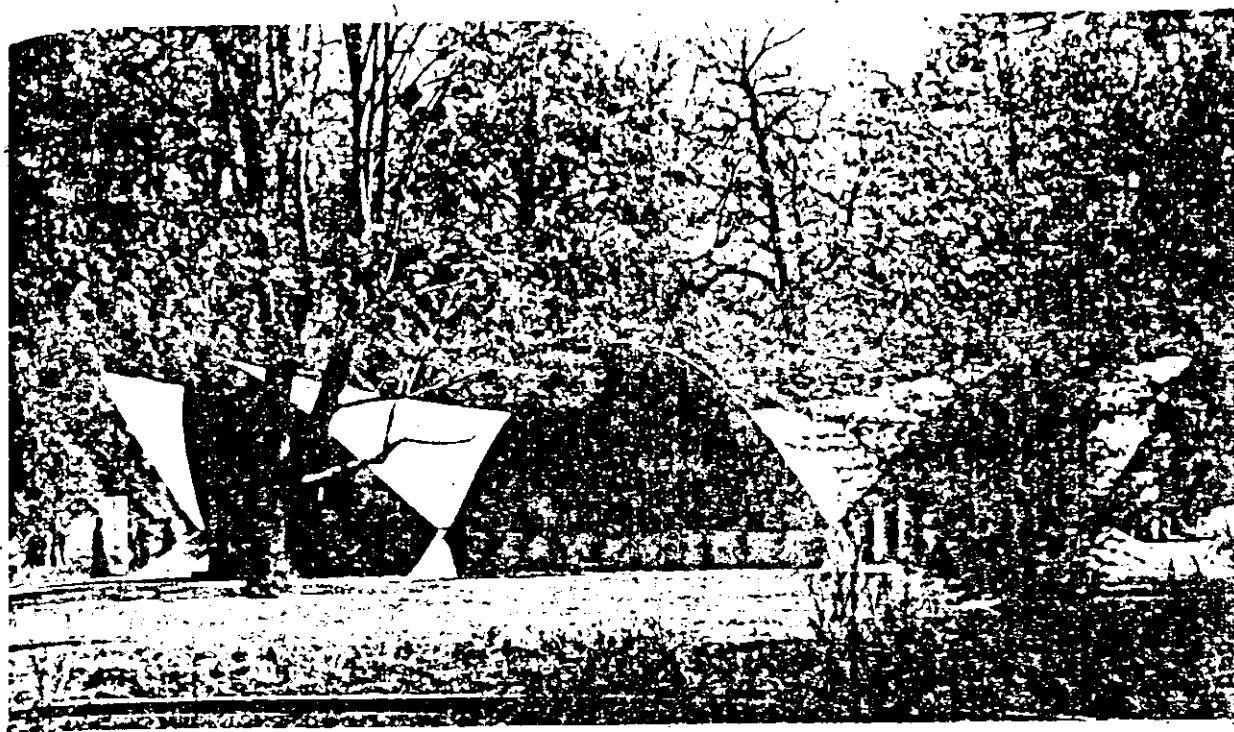


b) Planta

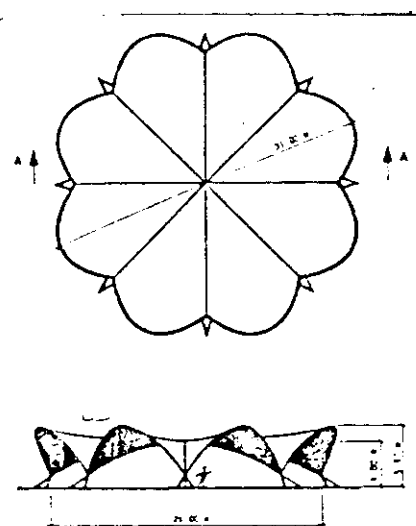
Características geométricas
e elementos estruturais

- 1 - CABOS CONVEXOS
- 2 - CABOS CÔNCAVOS
- 3 - PEÇA PRÉ-MOLDADA
- 4 - TRELIÇA METÁLICA
- 5 - VIGA PERIMETRAL
- 6 - PAREDE SUPORTE DOS CABOS

FIG. 19- (44) Elevação e planta do Ginásio Municipal de San Juan (Porto Rico)



a)



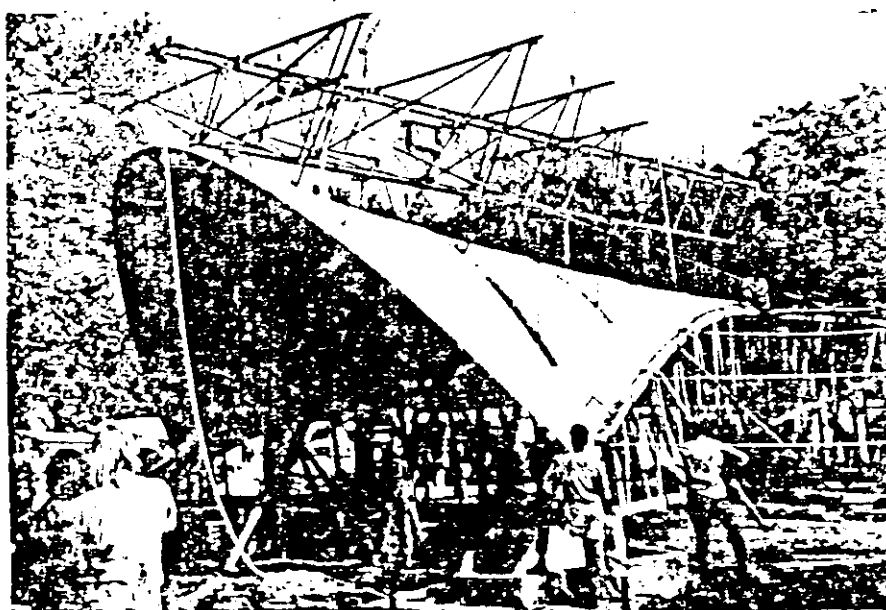
b)

FIG. 20 -(45)-Parabolóide hiperbólico em concreto armado com fibra de vidro.

a - vista geral

b - planta e elevação

c - segmento pré-moldado da casca.



c)

pode-se avaliar o potencial de coberturas pré-moldadas com essa forma em casca (em cuja construção se aliou a pré-moldagem a modernas técnicas construtivas), que se mostrou eficiente e também bastante econômica por dispensar quase que totalmente o uso de cimbres e formas provisórias e minimizou o tempo de construção.

Outro exemplo em parabolóides hiperbólicos, merecedor de admiração pela bela plástica e pelo aproveitamento quase que total da forma, é o visto na Fig. 20; construído em concreto armado com fibra de vidro e tendo espessura, na maior parte da superfície, constante e igual a 1cm, o que conduziu a um peso total de 25 toneladas.

As peças foram feitas em grandes módulos a seguir transportados e colocados lado a lado e apoiado e a seguir, conectados nos "vales" da casca e arcos rotulados nos apoios e entre eles.

5. CONÓIDES

Os conóides são as superfícies geradas a partir do movimento de um segmento de reta, de comprimento variável, paralelo a um plano - plano diretor - que mantém um de seus extremos sempre em contato com uma linha reta e o outro com uma curva; é, portanto, uma superfície regrada e que, por esta característica, oferece facilidade para a confecção de suas fôrmas de concretagem.

Os conóides são usados, por sua própria geometria, normalmente como coberturas em shed para recintos industriais e aqueles que necessitam de boa iluminação ou ventilação; suas dimensões transversais geralmente são preponderantes às longitudinais, o que confere à estrutura maior rigidez e proporciona rápido escoamento das águas pluviais. Havendo necessidade de maiores comprimentos, faz-se a associação de vários painéis.

Quando pré-moldados, os conóides são seccionados

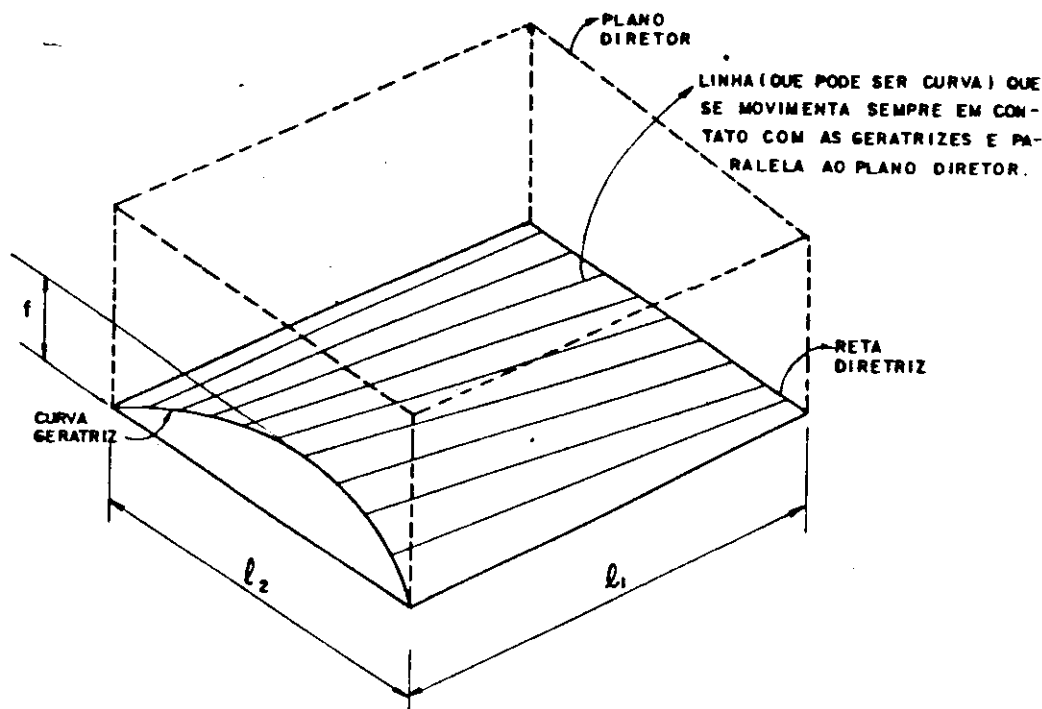


FIG. 21 - Conóide. Geometria

por planos paralelos ao diretor e sem cortes transversais, evitando-se juntas longitudinais, e as peças tendo comprimentos iguais a l_1 . Dependendo do espaçamento entre os planos divisórios, as peças pré-moldadas terão um comportamento estático diferente enquanto separadas, o que influenciará na forma de seus levantamentos.

Com linhas divisórias mais espaçadas, as peças individuais poderão ter comportamento típico de conóide, o que exigirá enrijecimento lateral (provisório ou não), representando as vigas e o(s) arco(s) de borda.

Caso a discretização da superfície seja maior, as peças estarão sujeitas durante o levantamento, e até antes de serem rejuntadas entre si, a flexões longitudinais típicas de vigas, que podem ser melhor absorvidas se forem enrijecidas por nervuras transversais e longitudinais e, algumas vezes, por protensão.

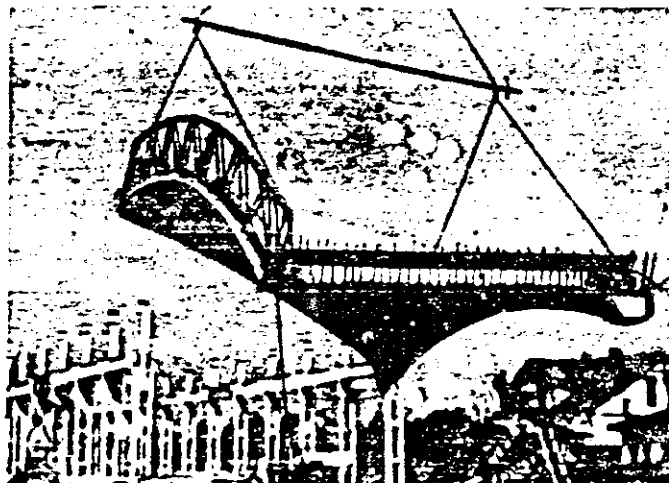


FIG. 22-(46)-Segmento de conóide e enrijecido provisoriamente nas laterais.

O tipo de junta entre as peças, irá depender de suas dimensões transversais, pois ainda que o conóide submetido a carregamento de peso próprio (e outros com distribuição semelhante), trabalhe quase que totalmente comprimido, existem, nas bordas e proximidades, perturbações no estado de membrana que ocasionam trações por flexão em certos trechos, o que não é interessante para as juntas. Segue-se, então, que algumas juntas podem se localizar em regiões tracionadas e, neste caso, se efetuarão por trespassse ou soldagem das armaduras de duas peças adjacentes ou, ainda, por protensão, que seria o melhor processo para garantir monoliticidade à estrutura. As conexões situadas nas regiões mais centrais não representam maiores problemas.

Mostra-se a seguir, dois exemplos de conóides pré-moldados; ambos são coberturas industriais, a primeira foi construída na Bulgária e seu esquema é visto na Fig. 23 com cada painel formado por quatro módulos com dimensões de 4,50 x 6,00m (em planta) apoiados em uma viga reta e um arco bi-articulado. Sendo os módulos de grandes dimensões, houve necessidade de enrijecimento das bordas, e isto foi feito com treliças metálicas curvas, como visto na Fig. 22. A união entre os módulos efetuou-se através de argamassa colocada entre eles.

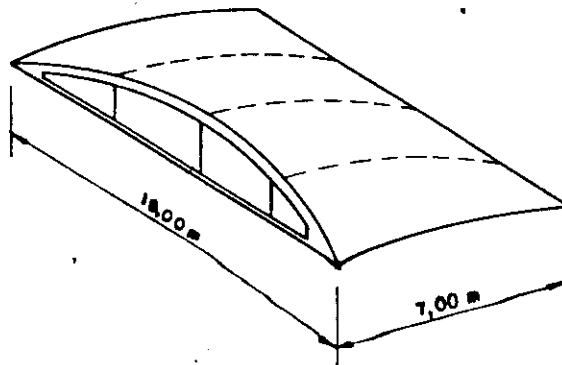
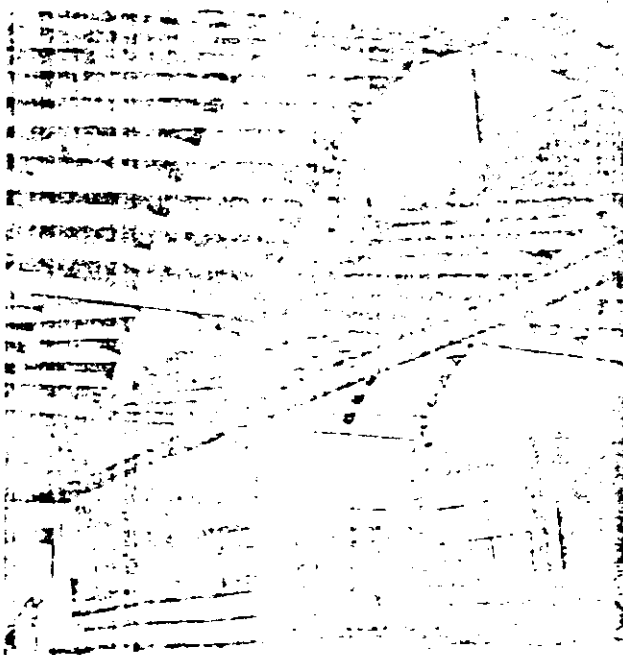
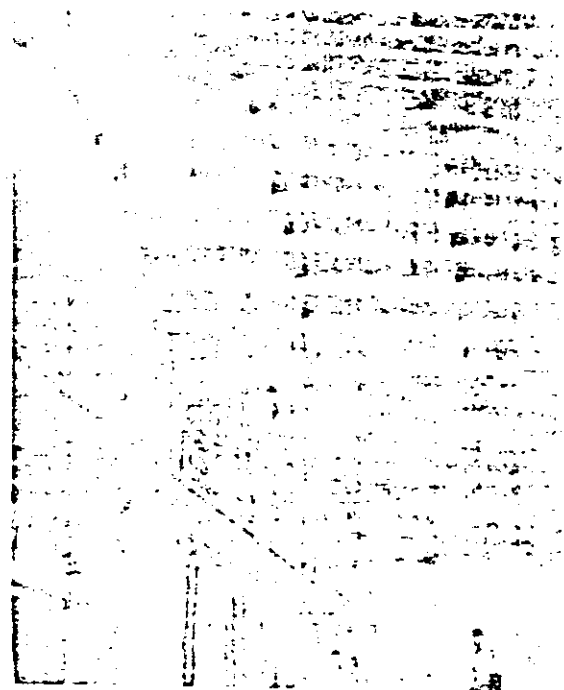


FIG 23-(46) - Superfície do conóide composto de peças pré-moldadas com dimensões de 4,50 x 7,00 m.

A segunda cobertura foi construída na Índia e os elementos pré-moldados foram feitos nervurados segundo as direções principais e protendidos longitudinalmente. As dimensões foram adotadas de modo a facilitar o transporte e também para que a geometria da seção transversal, parabólica, fosse mantida ou quase. As juntas foram preenchidas com argamassa e beneficiadas indiretamente pela protensão executada na viga de menor curvatura.



a)



b)



FIG. 24(56) - Conóide pré-moldado composto por elementos planos nervurados e protendidos longitudinalmente.
a - vista mostrando as peças em posição para concretagem e o equipamento de transporte.
b - vista interior c - vista geral.

Finalizando, tem-se que os conóides são viáveis para cobrir grandes recintos - comprimento longitudinal de 5 a 10m e transversal de 20 a 60m -, que exijam intensa iluminação ou ventilação e, fazendo-os pré-moldados, ganha-se em rapidez e qualidade de execução. Os cuidados que exigem são de necessitarem boa precisão na fabricação e posicionamentos das peças que, normalmente, não são retangulares em planta e sim apresentam ligeiras distorções.

6. CÚPULAS

As cúpulas são superfícies de dupla curvatura formadas a partir da rotação de uma linha geratriz em torno de um eixo vertical e, dependendo dessa geratriz, a cúpula será esférica, cônica, elíptica, etc. São usadas como coberturas de recintos circulares desde a Idade Antiga, como foi comentado antes, e isto se deve ao fato de seu comportamento estático se moldar às características de diversos materiais, como a pedra natural, cerâmica, ou mais recentemente, ao concreto.

A sua estrutura básica é composta da superfície apoiada geralmente em anéis ou diretamente em paredes verticais; seu topo, às vezes, é seccionado por um plano horizontal.

tal dispendo-se nesse corte um anel de compressão e um lanternim, que proporciona ventilação e iluminação natural.

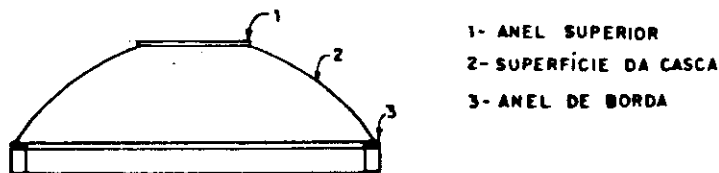


FIG. 25- Cúpula

Quando construídas pré-moldadas, o seccionamento da superfície é feito de modo a facilitar a montagem e minimizar o número de peças padrão; para isso, é subdividida de uma das formas abaixo:

- por planos ao longo dos meridianos;
- por planos ao longo dos meridianos e paralelos.

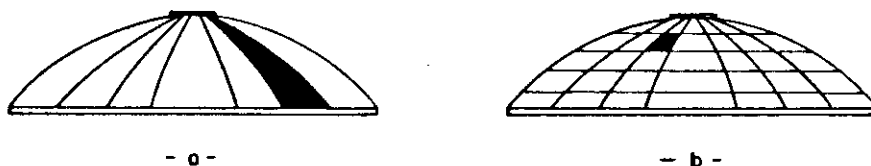


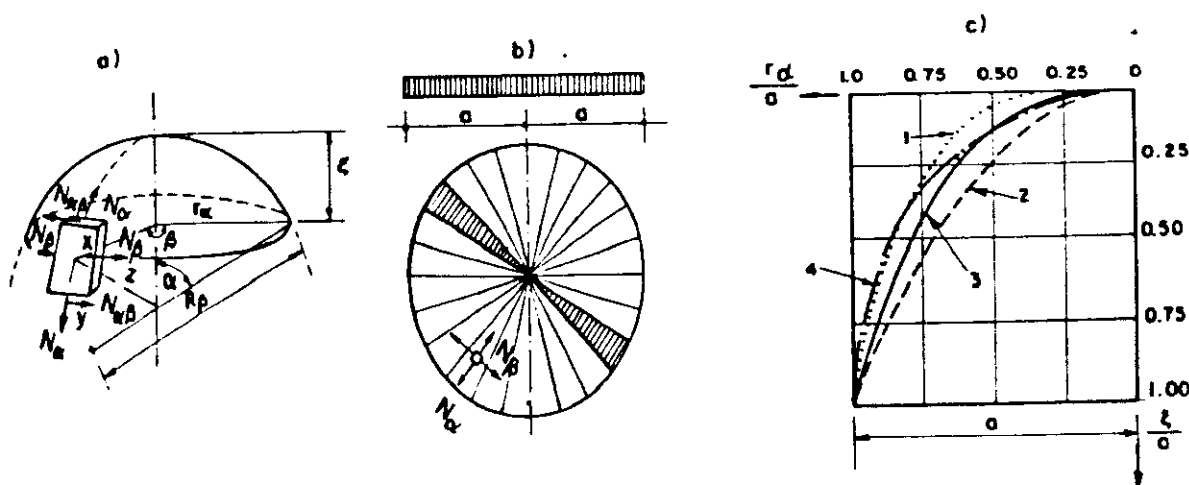
FIG 26 - Seccionamento da superfície das cúpulas.

- a) por planos ao longo dos meridianos; elementos pré-moldados são curvos e nervurados.
- b) por planos ao longo dos meridianos e paralelos; os elementos pré-moldados poderão ser curvos ou planos.

Em caso de seccionamento por planos ao longo dos meridianos, as peças apoiam-se nos anéis de base e de topo (por sua vez apoiado em cimbres provisórios) e são colocadas sobre estes de forma simétrica em torno da circunferência, o que evita empuxos não equilibrados sobre o cimbramento do anel central. A estrutura, composta inicialmente de "arcos", terá um comportamento desejável de casca somente para as cargas que atuarem após o rejuntamento das peças,

portanto, após o descimbramento do anel central ou sob ação de sobrecargas como, por exemplo, o vento.

Para que as juntas trabalhem sempre comprimidas, e isto é interessante, é necessário que a curva diretriz dos meridianos situe-se abaixo da curva funicular para determinado carregamento, caso seja outra a posição, teremos também trações segundo os paralelos ou o carregamento equilibrado somente ao longo dos meridianos. O quadro seguinte, extraído de Makk (46), mostra o posicionamento de algumas diretrizes em relação à funicular do peso próprio.



Com essa forma para as peças pré-moldadas já foram construídas diversas cúpulas, mostrando-se como exemplo de uma delas, alguns aspectos construtivos do Planetário da cidade de Nuremberg (Alemanha Ocidental) (Fig.27).

Se a cúpula for seccionada também segundo os paralelos, trabalha-se com peças menores e o consumo de cimbramento e as dificuldades construtivas em relação à cúpula construídas monoliticamente são bastante reduzidos. Neste caso, a cobertura é montada em sucessivos anéis concêntricos e as peças de cada anel ficam provisoriamente apoiadas no anterior até o endurecimento da argamassa de rejuntamento, passando-se então ao anel seguinte. O cimbramento

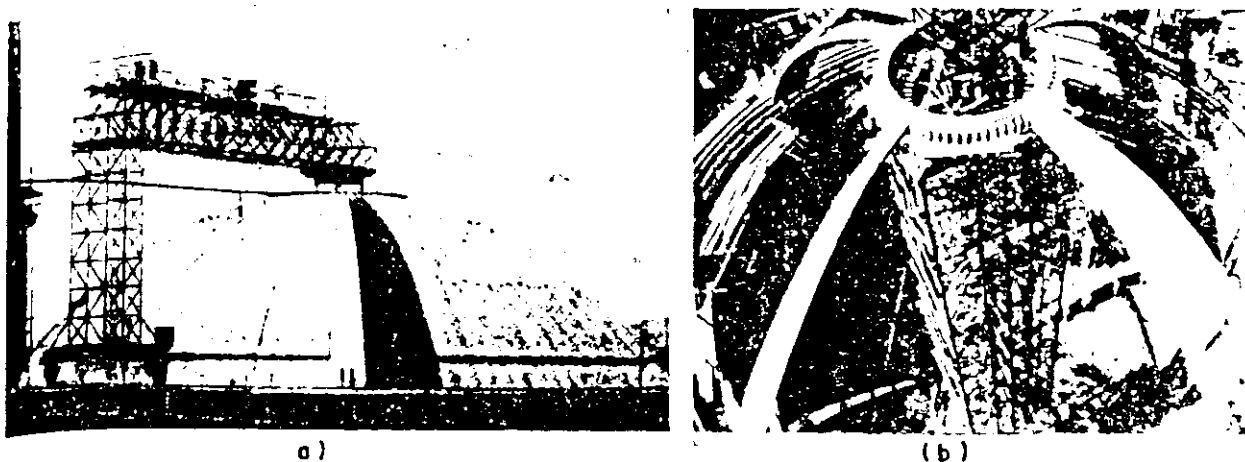


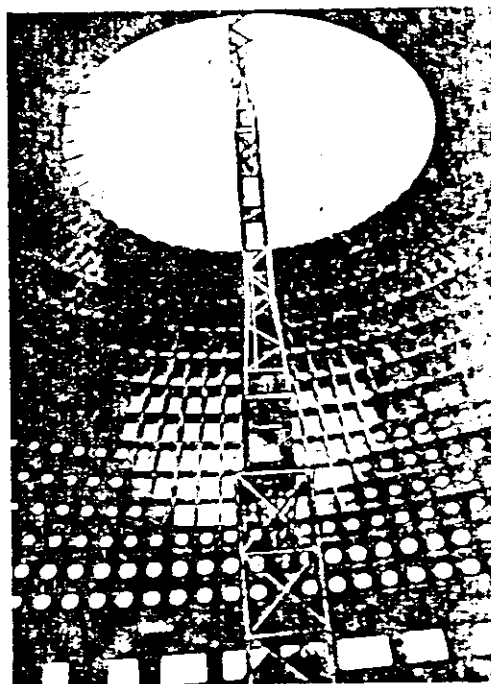
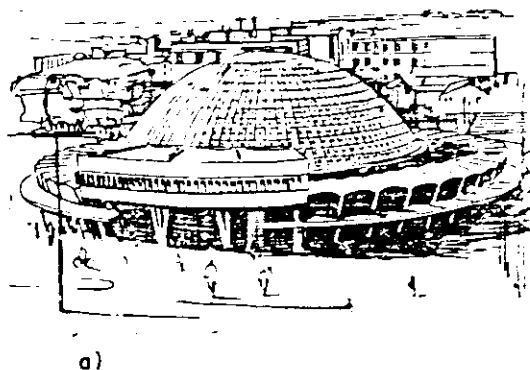
FIG. 27-(36) Cúpula composta de elementos nervurados

a - vista geral

b - aspecto do cimbramento.

do primeiro lance é feito apoiado no anel de borda.

As figuras seguintes ilustram essa forma de pré-moldagem, mostrando alguns detalhes construtivos da cobertura de um mercado em Sidi-Abbes (Argélia).



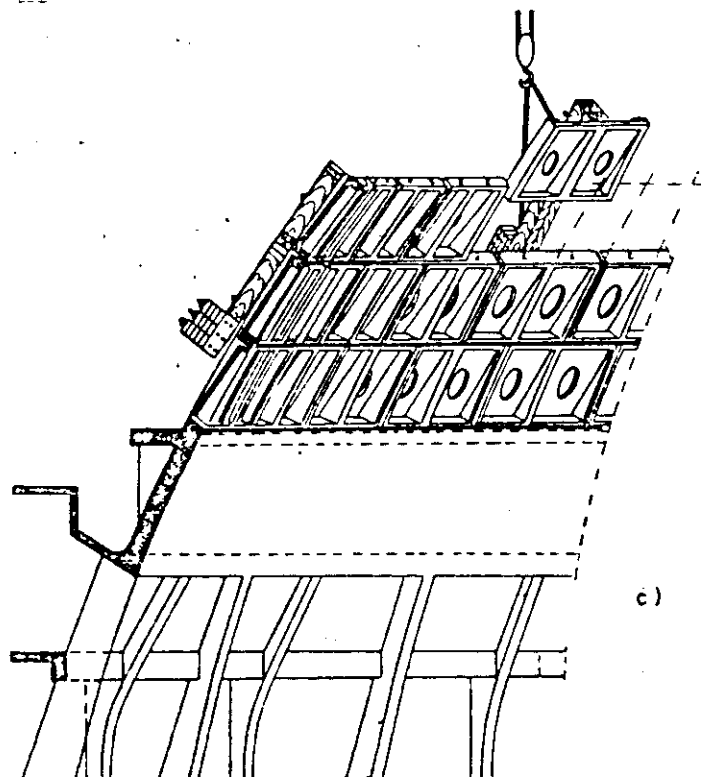


FIG.28 -(45) - Cúpula composta de elementos planos.

a) visto geral b) visto interior

c) aspecto do cimbramento

7. CASCAS FUNICULARES

Geralmente, a concepção de novas formas geométricas em casca visa atender a motivos arquitetônicos, passando-se à análise estrutural numa etapa seguinte. Com isso podem ser obtidas superfícies de bela plástica mas que não tiram proveito das características mecânicas do material construtivo mais usado, que é o concreto. O caminho inverso pode ser tentado, isto é, idealizar um estado de tensão propício para o material e para certo carregamento, considerado predominante ou principal (para as cascas, geralmente o peso próprio), e a partir daí, gerar uma forma afim da funicular deste.

Isto é conseguido para alguns tipos de reservatórios e no caso de coberturas para as cascas corrugadas ou onduladas (de curvatura simples) em catenária (que é a fu

nicular correspondente ao peso próprio) e para as cascas Prandtl (de dupla curvatura).

Como pré-moldados são mais utilizadas as corrugadas, por cobrirem maiores vãos e por mais simples confecção, com as peças sendo justapostas e unidas longitudinalmente por trespasse de armaduras das peças vizinhas ou por protensão; transversalmente a união se faz por trespasse das armaduras.

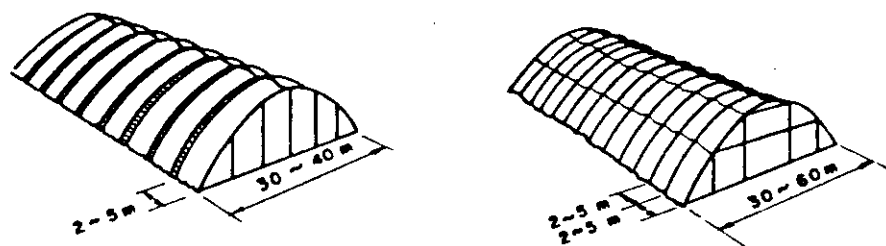


FIG. 29 - Coberturas corrugadas pré-moldadas

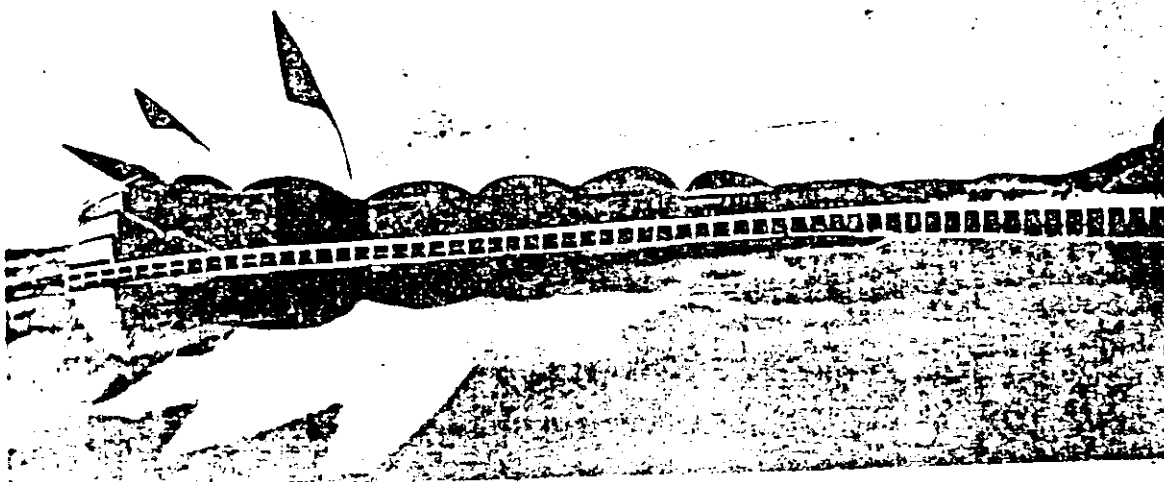
As dimensões de coberturas feitas com as peças corrugadas são um indicativo da eficiência destas. Em Mokk (46) são descritos detalhes construtivos de coberturas compostas desses elementos com dimensões transversais de 2 a 5m e longitudinais de 15 a 20m, utilizando-se peças menores, "costurando-as" depois, consegue-se vãos de até 60m em projeção horizontal, com espessura média de 5 cm.

8. OUTRAS CASCAS PRÉ-MOLDADAS

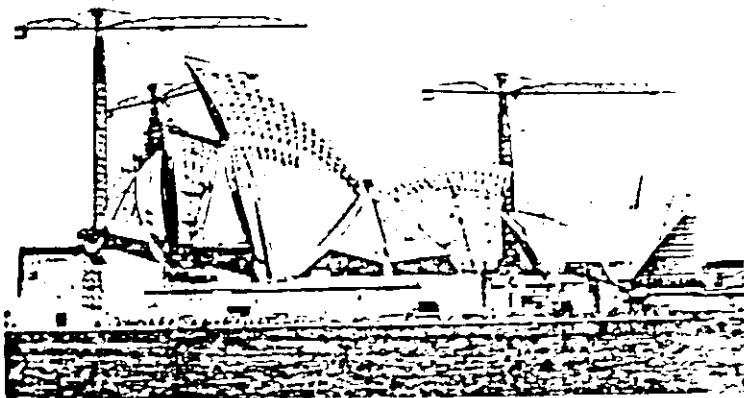
As coberturas pré-moldadas apresentadas, como se disse ao início, são as de uso mais corrente ou que já foram ou são produzidas em escala industrial. Existem outras não tão difundidas mas que feitas pré-moldadas mostraram-se viáveis, algumas delas obtendo, inclusive, destaque internacional.

Assim, temos a cobertura da Ópera de Sydney (Austrália) cuja estrutura é composta pela associação múlti

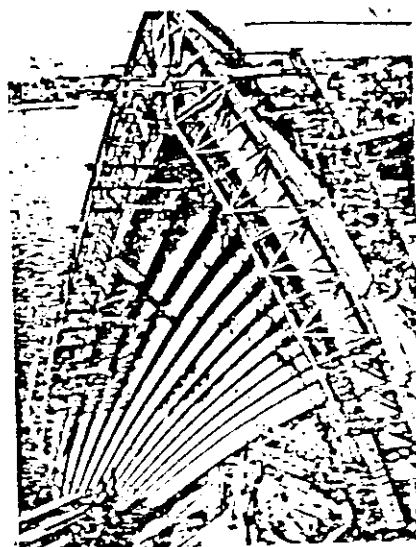
pla de setores curvos originários de uma mesma esfera formam do diversas "conchas", e que se destaca principalmente pela bela plástica, que se integra perfeitamente ao cenário marítimo, do qual passa a fazer parte, e pela técnica executiva.



a)



b)



c)

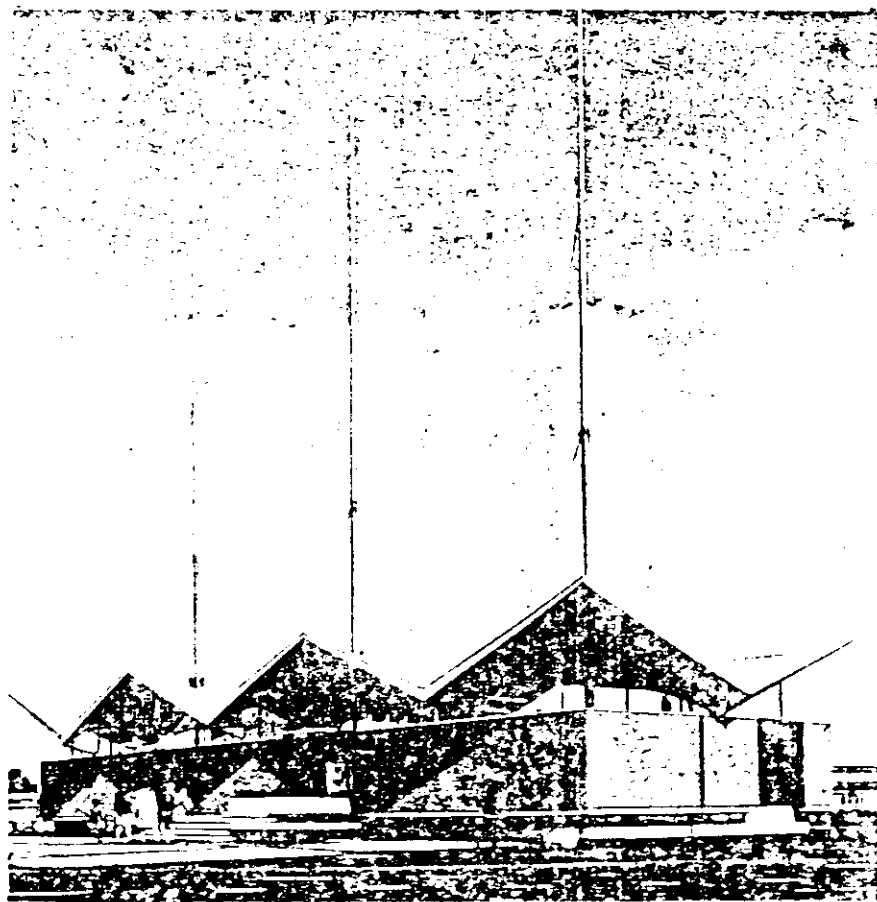
FIG 30-(41)-Ópera de Sydney

a- vista geral

b;c - aspectos de montagem da estrutura

A cobertura foi sendo formada em trechos sucessivos por peças pré-moldadas, nervuradas, apoiadas temporariamente em treliças metálicas, até serem solidarizadas entre si e à parte executada, passando-se daí ao trecho seguinte; ao final foi toda recoberta com cerâmica branca, o que fez realçar a forma.

Outro exemplo interessante é o da cobertura do Algemene Bank Nederland (Holanda), que foi feita suspensa, suportada por tirantes ligados a um mastro central. Sua superfície é constituída de doze módulos pré-moldados em parabolóide hiperbólico interligados entre si nas linhas de arestas. Para evitar oscilações e giros de cobertura, causados por ventos e outras cargas horizontais, existem, conectados à casca nos vértices de menores cotas, apoios inclinados que também têm a função de auxiliar os cabos no equilíbrio de eventuais sobrecargas verticais. Vêem-se abaixo aspectos construtivos e estáticos dessa cobertura.



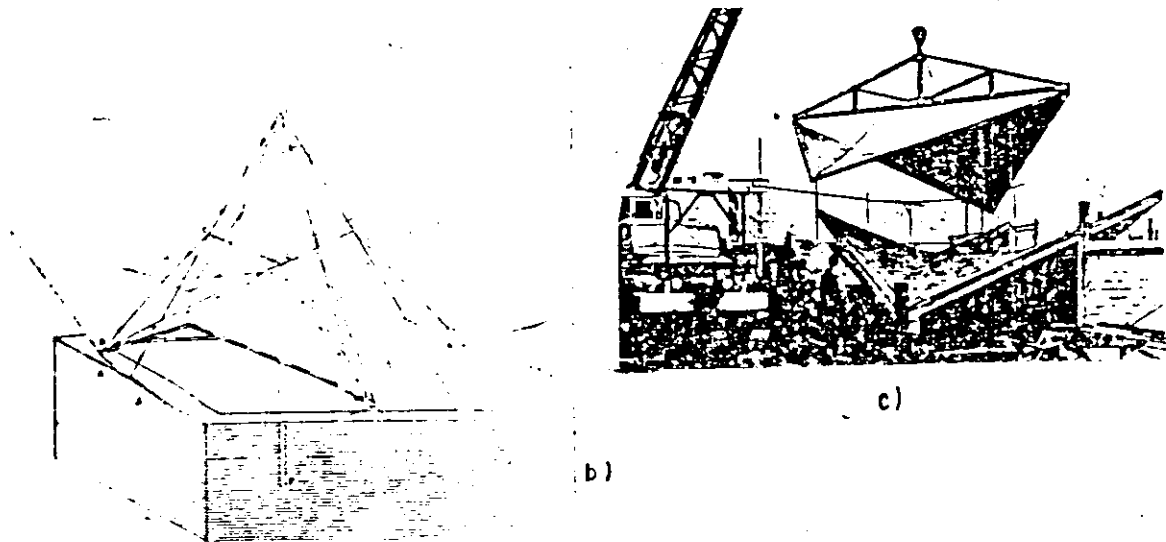


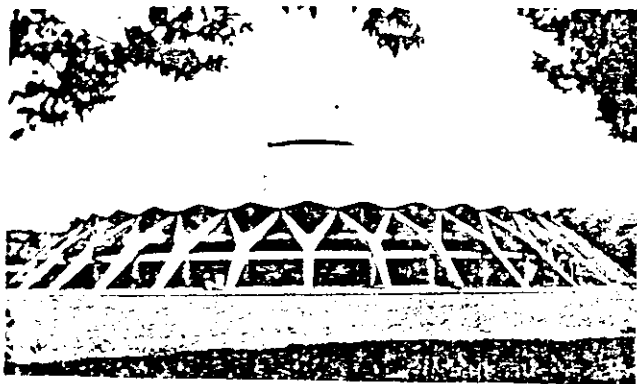
FIG. 31- (38)- Cobertura do Algemeene Bank Nederland (Holanda)

a - vista geral

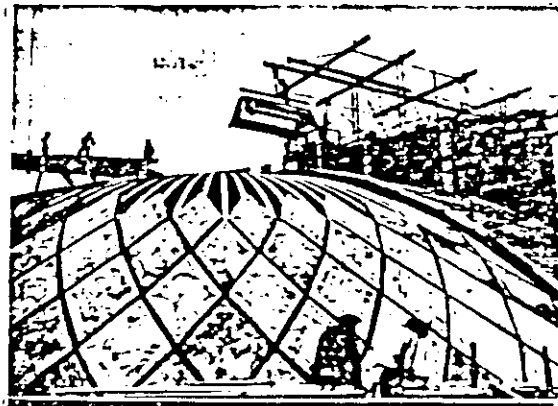
b - forma da sustentação da cobertura

c - transporte das peças pré-moldadas

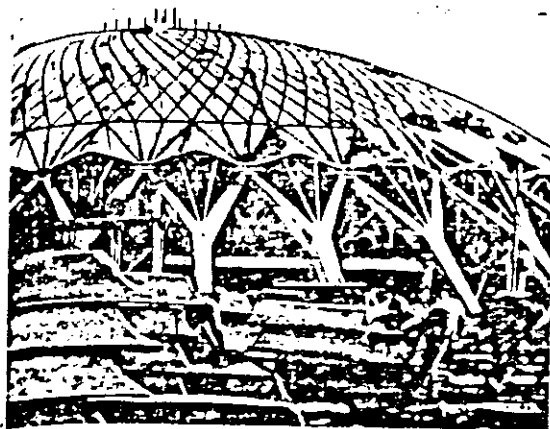
A cobertura do Palacete dos Esportes em Roma, projetada por Kervi, à época dos jogos Olímpicos em 1960, é outra estrutura que causa impressão por suas dimensões (diâmetro de ~ 60m), pelo sistema construtivo e pelos efeitos geométricos presentes em sua superfície inferior.



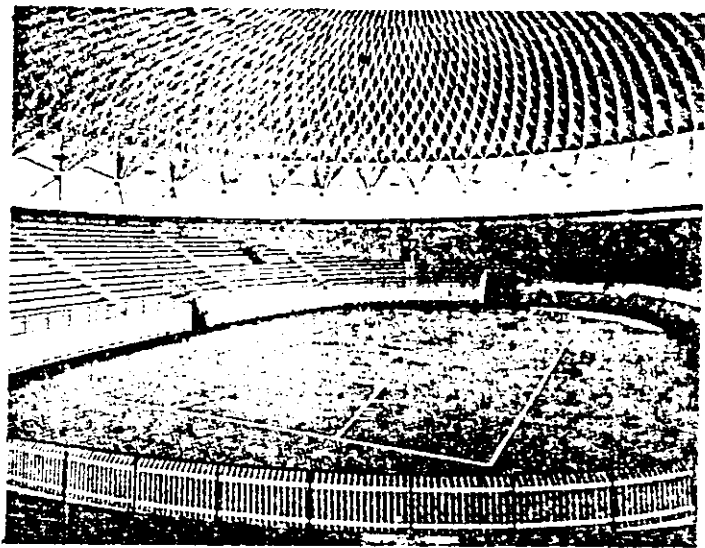
a)



b)



c)

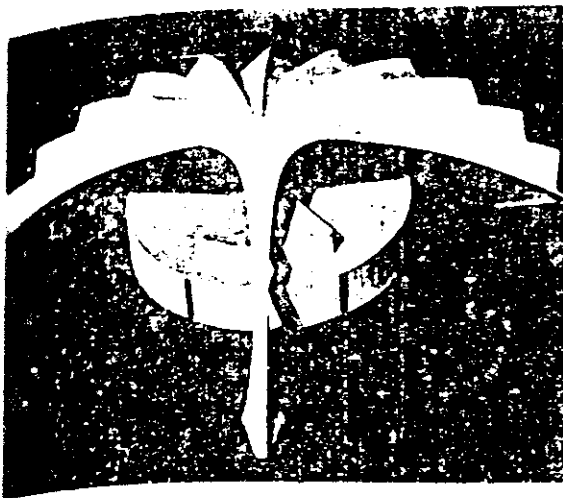


d)

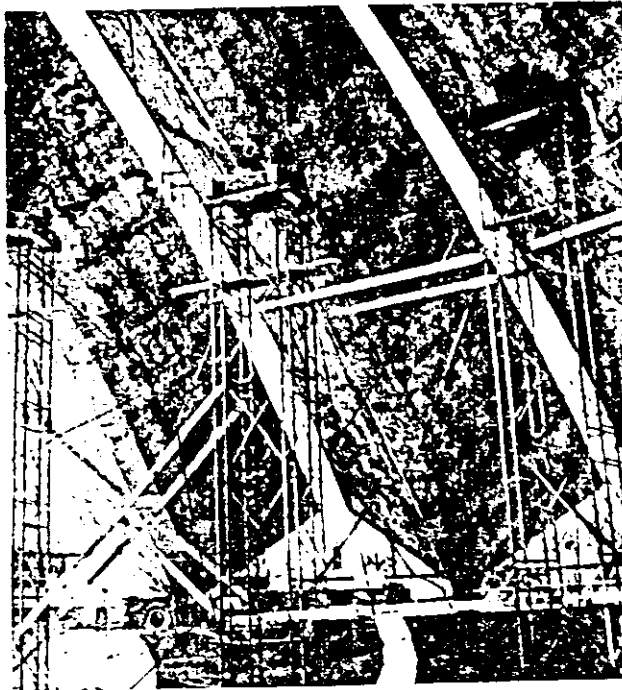
FIG. 32-(38,46)- Polocete dos Esportes (Roma)
a-visto geral
b;c - aspectos de montagem da superfície
d-vista interior

A construção dessa "membrana" pode ser classifica da como um meio termo entre a construção pré-moldada e a monolítica, isto porque, primeiro formou-se uma superfície de peças pré-moldadas (sem ligação entre si), cujas dimensões e formatos foram determinados por imposições construtivas e arquitetônicas; a seguir, usando a anterior como fôrma, conocretou-se uma outra superfície, armada, que interligada à inferior, compõe a cobertura final.

Merecedora de destaque é também a estrutura de cobertura do auditório do Colégio de Culver-City (Califórnia-USA), plissada e em formato de concha; compõe-se de onze "folhas" pré-moldadas feitas de agregado leve e com seção transversal variável. As "folhas" são interligadas por concreto lançado in loco e apoiam-se, na parte superior, num patamar de uma haste curva; na base são apoiadas em suportes isolados, típicos de membrana, cujas fundações são ligadas às da haste por tirantes.



a)



b)



c)

FIG. 33-(40) Auditório em Culver-City

a- vista geral

b- aspecto de montagem da superfície

c- vista interior

9. ALGUNS ASPECTOS CONSTRUTIVOS DAS ESTRUTURAS EM CASCAS, MONOLÍTICAS OU PRÉ-MOLDADAS

Serão feitos, a seguir, alguns comentários práticos envolvendo confecção de fôrmas, concretagem, cura e cimbramento de estruturas em casca, aplicáveis não somente às pré-moldadas, mas também às construídas de forma monolítica.

9.1 - Fôrmas e cimbres

Viu-se então que, se por um lado as estruturas em casca permitem cobrir grandes áreas através de vãos arrojados ou pela associação de painéis de pequenas e médias dimensões, por outro lado, a construção é desfavorecida pelo consumo de madeiramento de fôrmas e, principalmente, pelo trabalho de formação da superfície ser quase artesanal, o que dificulta a construção e aumenta seu custo; exceções existem, como as superfícies regradadas e algumas de curvatura simples.

O fato de necessitarem de muito material para suporte provisório é inerente a todas as superfícies laminares e, portanto, não é um fator determinante para se preferir uma solução em casca em favor de uma composta de lajes e vigas embora, sempre que possível, se deva procurar economia nesse consumo. O fator principal que irá ou não definir uma casca como construção economicamente viável, está ligado diretamente à feitura de suas fôrmas que, como se sabe exige precisão e, por isso mesmo, melhor material humano e maior tempo; por outro lado seu custo total será cada vez mais atenuado à medida que as fôrmas sejam usadas mais e mais vezes.

Segue-se que sempre deve existir, ao lado do projeto estrutural, uma sequência construtiva na qual seja prevista a máxima reutilização de fôrmas e cimbres, que por

sua vez sejam colocados e retirados de maneira simples, e ser planejada sua execução de forma a não ocorrerem inconvenientes práticos.

Como conseguir esses objetivos irá depender de como a cobertura será executada, se pré-moldada ou concretada in loco. Na primeira opção têm-se as conveniências comentadas nos itens anteriores e, no caso da segunda, as possibilidades de otimizar o uso das fôrmas (minimizando o consumo de material e propiciando facilidades executivas) são as de preparar a superfície de cobertura no solo, em diversos módulos e em seguida colocá-la sobre o cimbramento para concretagem ou fazer uso de fôrmas e cimbres móveis, que particularmente é uma opção vantajosa quando o número de seções de mesma geometria é elevado.

Montar a estrutura da superfície de concretagem no solo não exige cuidados além dos necessários, especificados no anexo, e a vantagem é a de executá-la em condições favoráveis de trabalho. É um sistema indicado quando existem vários painéis idênticos e mesmo quando é só uma estrutura, porém de geometria mais complicada. Dependendo das dimensões dos módulos, esse sistema pode exigir e equipamento de transporte não facilmente disponível.

Com esse esquema construtivo, fez-se a cobertura de uma biblioteca em Dallas, concretada in loco e formada pela associação de vinte calotas esféricas sobre planta quadrada, cada qual com 7,60m de vão, perfazendo uma área total de 1161 m². As fôrmas e seus cimbramentos foram feitas em módulos, no solo, e a seguir colocadas, para concretagem da superfície, apoiadas lado a lado em tubos metálicos. Aspectos construtivos são vistos adiante.

As fôrmas móveis são usadas geralmente para superfícies de curvaturas simples ou prismáticas (embora existam exemplos com os de dupla curvatura) e para vãos não muito longos, para os quais seu uso pode tornar-se anti-econômico e apresentar dificuldades operacionais. Em (35) e em (45) podem ser encontrados dados econômicos de

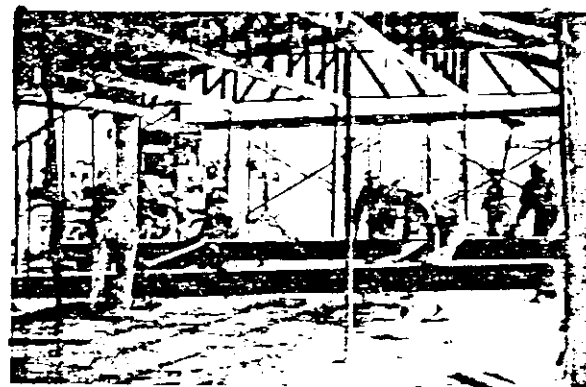
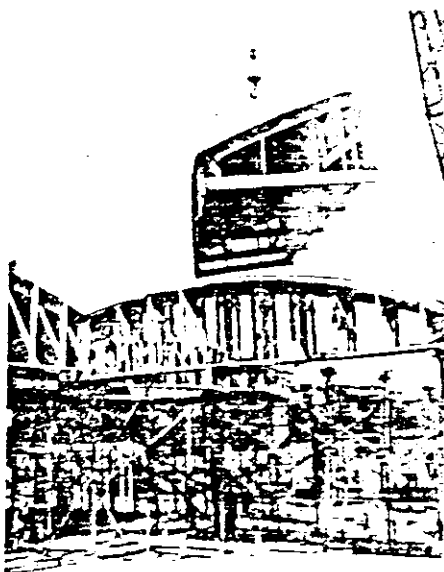
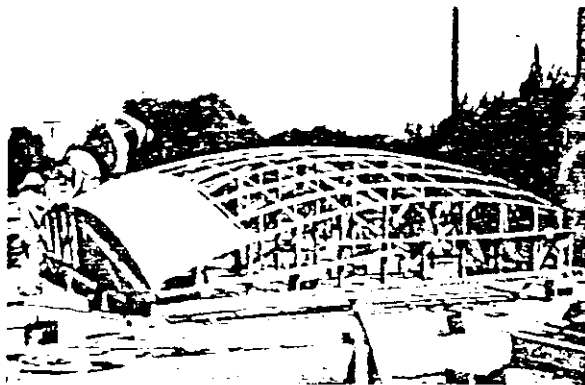
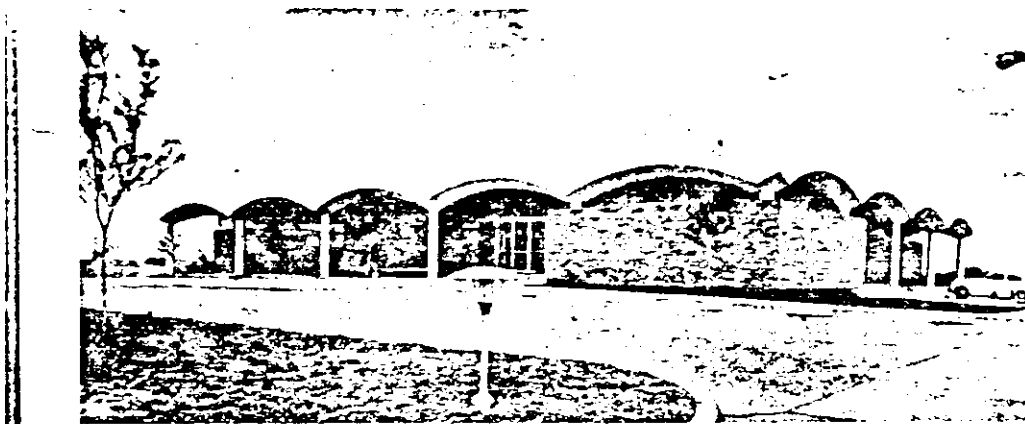


FIG 34 - (30) Calotas esféricas pré-moldadas no solo
Aspectos gerais e construtivos

monstrativos acerca do desempenho de fôrmas m^ôveis para certas estruturas em casca, sendo que as coberturas que mais se prestam ao uso de fôrmas m^ôveis são as cascas cilíndricas (inclusive em shed) e as prismáticas.

Quanto à confecção de fôrmas e moldes de concretagem, tem-se que estes apresentam problemas característicos motivados pelas formas algumas vezes complexas das cascas, que exigem trabalho mais delicado e preciso para minimizar imperfeições na geometria final, cujos riscos são ampliados em situações que apresentem maiores dificuldades executivas.

Para as fôrmas deve-se, antes de mais nada, especificar adequadamente a superfície final da cobertura, descrevendo-a através de coordenadas em quantidade e precisão suficiente e estabelecer tolerâncias, evitando assim de, terminada a cobertura, ter-se uma de comportamento diferente do previsto.

Desde que essas estruturas são quase sempre deixadas expostas, sem revestimento interno ou externo, atenção deve ser dada à textura do material das fôrmas, fazendo-se nestas o tratamento necessário para um bom acabamento.

A retirada das fôrmas, quando a concretagem é feita in loco, constitui-se numa operação crítica pelos defeitos que podem aparecer na superfície interna se aquelas não se soltarem facilmente do concreto, assim como podem originar problemas mais graves se o cimbramento ficar suspenso, preso à cobertura, constituindo-se sobre estas em cargas adicionais e concentradas que podem inclusive superar as sobrecargas previstas em projeto; nas superfícies pré-moldadas esses problemas são restritos às regiões de juntas.

Para o dimensionamento dos escoramentos e fôrmas é necessário prever todos os carregamentos possíveis durante o processo construtivo. Tais carregamentos são o peso próprio e os originados por cargas localizadas ou excêntricas durante a sequência de concretagem e também a ventos, impactos, etc. É necessário, então, que a estrutura de su

porte provisório seja rígida e suficiente para evitar deformações e com elas, o aparecimento prematuro de fissuras, viáveis após a desfôrma e que irão se ampliar no decorrer do processo de endurecimento do concreto.

No ACI Formwork for Concrete são encontradas recomendações gerais que auxiliam no projeto e construção de apoios provisórios para estruturas em casca.

9.2 - Concretagem

Os cuidados a serem tomados para a concretagem das estruturas em casca em nada diferem dos tomados em relação às formas convencionais, apenas que, pela existência de curvaturas, certas regras devem ser observadas, como por exemplo, que a concretagem, salvo casos especiais, deve iniciar-se pela base, ou seja, a região de maior declividade em direção às de menor, propiciando acomodação natural do concreto por gravidade. O concreto deve ser de consistência média, não sendo demasiadamente fluido, o que causaria escorregamento da massa rumo às seções de maiores declividades, e nem muito seco, prejudicando o trabalho de vibração.

A sequência de concretagem depende basicamente das dimensões e geometria da casca, porém, de maneira geral é feita segundo anéis concêntricos no sentido base-topo ou segundo faixas dispostas simetricamente e com sentido de crescimento dirigido para o centro, como no caso das cascas de translação. Outras soluções são possíveis, tendo sempre o cuidado de preferencialmente, lançar o concreto de forma a ter simetria de carregamento sobre a estrutura de apoio provisório, precavendo esta de deslocamentos e esforços adicionais e imprevistos que provocam, respectivamente, gastos adicionais com reforços ou imperfeições geométricas. Se necessário, devem ser previstas e detalhadas as paradas de

concretagem, cuja localização deve estar, preferencialmente, em zonas comprimidas.

Para superfícies de curvatura acentuada (tangente à superfície acima de 35°), é recomendado o uso de fôrmas duplas para facilitar a colocação e a contenção do concreto.

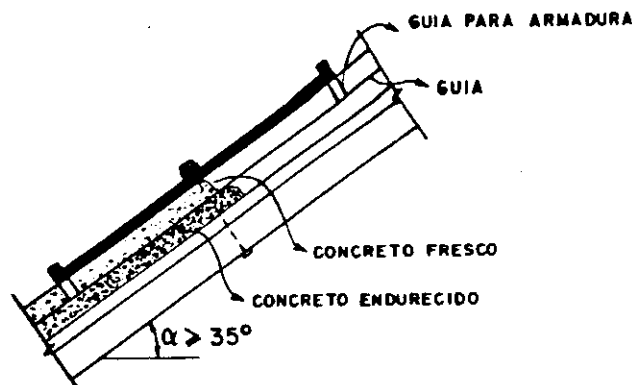


FIG 35- (35)- Fôrma duplo

Para as superfícies abatidas de pequenas e médias dimensões, os principais cuidados se resumem em dispor simetricamente um concreto bem dosado e boa trabalhabilidade sobre fôrmas estanques que formem, com o cimbramento, um sistema suficientemente rígido.

Quanto ao processo de cura, devido às grandes superfícies expostas que geralmente apresentam, as coberturas em casca são sensíveis à perda rápida da água de mistura do concreto por evaporação, o que irá acelerar a retração e com ela o aparecimento de fissuras no concreto de pouca idade. As soluções são as empregadas normalmente para as lajes: saturar as fôrmas antes do lançamento do concreto e manter úmida a superfície livre deste, através de uma camada de água ou de areia saturada ou, ainda, mantê-la protegida por uma película química.

9.3 - Descimbramento

O reaproveitamento das fôrmas ou moldes de concretagem é de fundamental importância e, por isso mesmo, é interessante que o concreto atinja o quanto antes uma resistência mínima que permita se processar a desmoldagem e a retirada do escoamento sem danos. Isso pode ser conseguido com o emprego de cimento de alta resistência inicial, com a inclusão, no concreto, de aceleradores de endurecimento que não interfiram na retração ou, através de processos térmicos (recomendados particularmente para pré-moldados de produção em série) que acelerem a pega e a cura do concreto.

Normalmente, as estruturas em casca de dimensões e proporções normais estão aptas a suportarem seu peso próprio e parte da sobrecarga quando o concreto atinge 70 a 85% de sua resistência cilíndrica aos 28 dias. Deve ser especificado em projeto a resistência mínima à época de desmoldagem com o fito de evitar deformações excessivas e assegurar rigidez suficiente à flambagem. A idade para o descimbramento pode ser estabelecida através do controle de deformações verificadas em vigas (de dimensões e carregamento especificados em Tedesko, A. - ACI Journal - Fev. 76) ensaiados consecutivamente ao longo dos dias, sendo que o descimbramento pode se processar quando as deformações se tornarem menores que as especificadas em projeto.

A retirada dos cimbres e fôrmas deve seguir um esquema pré-estabelecido e controlado de forma a impedir o aparecimento de cargas assimétricas não previstas em qualquer parte da estrutura, possibilitando que a casca assuma a forma pretendida sem variações danosas. O princípio básico a ser seguido para o plano de descimbramento, é que este deve iniciar-se pelos pontos nos quais são previstos os maiores deslocamentos seguindo-se os menores, acompanhando a elástica da casca; o descimbramento dos apoios deve se processar juntamente com as partes da superfície que lhes são adjacentes.

Outros detalhes construtivos, como isolamento térmico e acústico, inclusão de conduites, impermeabilização, devem ser considerados, analisados e feitos, caso necessários. O isolamento térmico é normalmente feito de membrana ou placas de fibra de vidro, concreto poroso, etc., dispostos na superfície interna ou externa da casca, esse posicionamento sendo dependente das características do material usado e das condições climáticas; em regiões quentes onde o objetivo maior é evitar o aquecimento interno, o isolamento é mais efetivo se colocado na face externa; em regiões frias, onde é mais importante conservar o calor, é feito na superfície interna, podendo neste caso funcionar também como isolante acústico.

A impermeabilização, se necessária, é feita em material elástico - borracha sintética - e não quebradiço. Caso existam, os conduites elétricos podem ser embutidos no interior do concreto (com cobrimento suficiente) da superfície, tendo-se o cuidado de evitar regiões de concentração de tensões e, preferencialmente, devem ser dispostos à altura da linha neutra e paralelos à direção da armadura local.

III - PARABOLÓIDES ELÍPTICOS SOBRE BASE RETANGULAR. TEORIA E COMPUTAÇÃO.

1. CONSIDERAÇÕES GERAIS

Apesar de todos os elementos estruturais serem corpos tridimensionais, nem sempre uma formulação geral envolvendo tensões e deformações em todas as direções se faz necessária em suas análises, isto porque podem os elementos apresentar particularidades que permitam simplificações nessas últimas.

Um bloco de fundação, por exemplo, apresenta todas as dimensões com a mesma ordem de grandeza, oferecendo resistência às deformações em todas as direções, o que já não ocorre com uma estrutura em barra, onde a seção transversal, de dimensões reduzidas face ao comprimento, não opõe resistência significativa às deformações em seu plano. Existem ainda elementos estruturais, constituindo outro grupo, que se caracterizam por permitir deformações significativas em apenas uma direção, são os que apresentam apenas uma dimensão reduzida comparada às outras e são denominados elementos de superfície ou laminares.

Dependendo então da rigidez do elemento em cada direção em que se definem as deformações e tensões, estas últimas poderão ser consideradas ou não desprezíveis e, em caso positivo, o número de incógnitas do problema tridimensional será reduzido, simplificando a análise do elemento a duas ou uma dimensão.

Sumariando o dito acima, os elementos estruturais classificam-se em três grandes grupos, conforme tenham uma, duas ou nenhuma dimensão pequena face às demais, ou seja:

- a) elementos estruturais lineares ou de barras (vigas, pilares, eixos, etc.);
- b) elementos estruturais de superfície ou laminares (paredes, cascas, lajes);
- c) elementos estruturais tridimensionais ou blocos (blocos de fundação).

Evidentemente, existem os casos limites entre um grupo e outro; os elementos de transição entre os de superfície e os de barra ou bloco, são de definição imprecisa e seus enquadramentos em um dos grupos depende de quanto se considere uma dimensão reduzida frente a outra; contudo, a divisão anterior já oferece, no mínimo, elementos para uma primeira classificação.

2. TEORIA GERAL DAS CASCAS. DEFINIÇÕES. HIPÓTESES GERAIS DE CÁLCULO

Denominam-se cascas às estruturas laminares que representam a materialização de uma superfície curva. Para que, geometricamente, uma casca fique perfeitamente descrita é necessário conhecer a forma de sua superfície média, que é aquela formada pelos pontos equidistantes de duas outras superfícies que limitam a casca, descrita por $F(x,y,z) = 0$

e a lei de variação de sua espessura, medida segundo a normal a essa superfície que a divide em partes iguais.

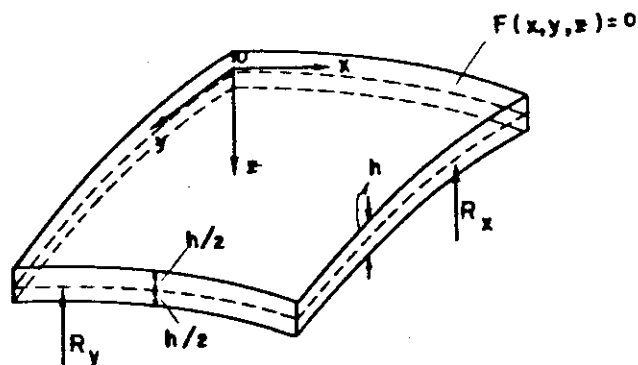


Fig. 1 - Superfície média. Elementos geométricos

Sendo uma estrutura laminar é interessante ter noção da ordem de grandeza de sua espessura; para tanto, define-se a esbeltez como a relação entre a espessura e o menor raio de curvatura, que para as cascas consideradas delgadas (as abordadas neste trabalho), obedece à condição de, em qualquer ponto, ser $\lambda = h/r_{\min} \ll 1/20$

Para o cálculo estático das estruturas laminares geralmente são admitidas as seguintes hipóteses fundamentais (hipóteses de Kirchhoff-Love):

- a) o material de que é feita a estrutura é homogêneo, isotrópico e tem comportamento elástico linear;
- b) a espessura é pequena e pode ser desprezada face às dimensões da casca e aos raios de curvatura da superfície média;
- c) as tensões normais à superfície média são desprezíveis em relação às demais tensões;
- d) os pontos pertencentes a uma reta normal à superfície média, permanecem nessa mesma reta após a superfície média estar deformada;

- e) as deformações impostas pelo carregamento são pequenas em relação à espessura, sendo possível desprezalas face a esta, sem que seja alterado o equilíbrio estático de um elemento de superfície.

3. EQUAÇÕES GERAIS

3.1 - Esforços solicitantes

Os esforços solicitantes em um ponto de uma casca são definidos à altura da superfície média e medidos por unidade de comprimento; seus valores são os correspondentes aos esforços resultantes obtidos a partir da integração, ao longo da espessura, das tensões atuantes em um elemento de lados com comprimentos unitários naquela superfície. Assim, os esforços solicitantes são os vistos a seguir, com seus sentidos positivos indicados na Fig. 2.b de acordo com a convenção:

- a) os esforços normais N_x e N_y são positivos quando provocam tração;
- b) os esforços N_{xy} e V_y são positivos quando tiverem o sentido positivo do eixo coordenado correspondente, em uma seção onde N_x também for positivo; considerações análogas podem ser feitas para N_{xy} e V_y ;
- c) os momentos fletores M_x e M_y são positivos quando provocarem tensões normais positivas nas fibras da seção correspondente a valores positivos de z ;
- d) os momentos volventes M_{yx} e M_{xy} são positivos quando provocam tensões de cisalhamento positivas nas fibras da seção correspondente a valores positivos de z .

$$N_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x \left(1 - \frac{z}{r_y}\right) dz$$

$$N_y = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_y \left(1 - \frac{z}{r_x}\right) dz$$

$$N_{xy} = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{xy} \left(1 - \frac{z}{r_y}\right) dz$$

$$N_{yx} = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{yx} \left(1 - \frac{z}{r_x}\right) dz$$

$$V_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{xz} \left(1 - \frac{z}{r_y}\right) dz$$

$$V_y = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{yz} \left(1 - \frac{z}{r_x}\right) dz$$

$$M_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x z \left(1 - \frac{z}{r_y}\right) dz$$

$$M_y = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_y z \left(1 - \frac{z}{r_x}\right) dz$$

$$M_{xy} = - \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{xy} z \left(1 - \frac{z}{r_y}\right) dz$$

$$M_{yx} = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{yx} z \left(1 - \frac{z}{r_x}\right) dz$$

Nas expressões dos esforços verifica-se a ausência daqueles correspondentes às tensões σ_z , τ_{zy} , τ_{zx} , pois estas foram desprezadas por se estar tratando de cascas delgadas. Deve-se observar também que a igualdade $\tau_{yx} = \tau_{xy} = \tau$ não implica na igualdade $N_{yx} = N_{xy}$, a qual ocorrerá se τ não variar com z ou se a relação z/r for desprezível comparada à unidade, o que é válido fazer pela hipótese b do item 2.

$$\left(1 - \frac{z}{r_x}\right) \approx \left(1 - \frac{z}{r_y}\right) \approx 0,$$

o que permite fazer $N_{xy} = N_{yx}$ e do mesmo modo $M_{xy} = -M_{yx}$.

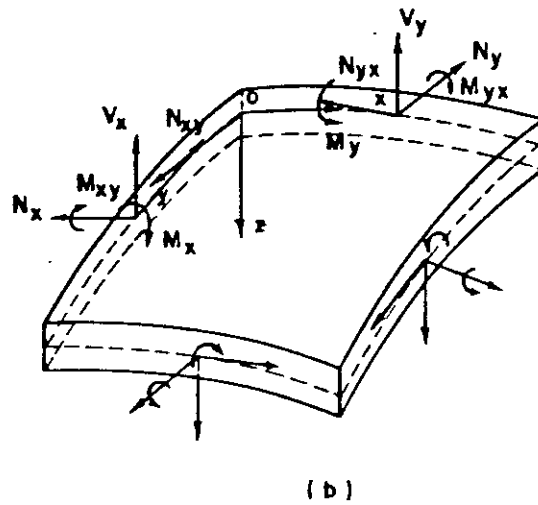
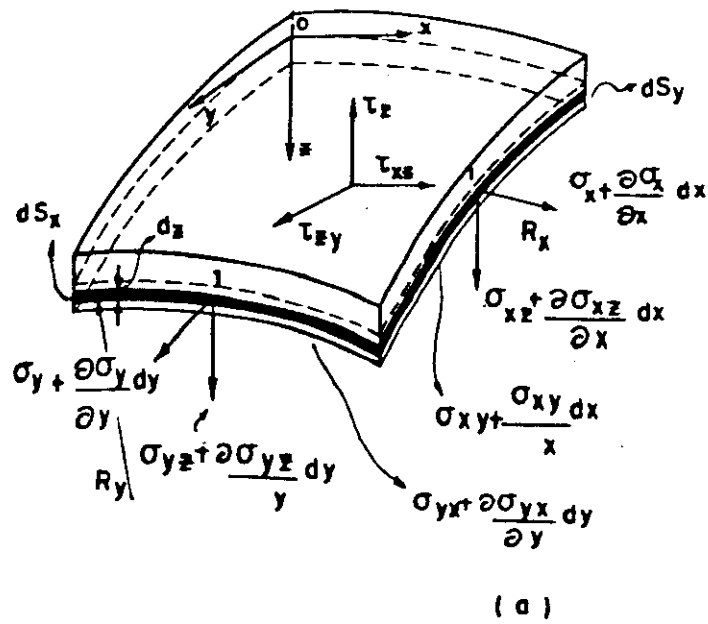


FIG. 2 - Tensões e esforços solicitantes em um elemento de casca.

3.2 - Equações de Equilíbrio

Antes de ser equacionado o equilíbrio entre as ações em um elemento de casca, é necessário que a geometria deste esteja suficientemente caracterizada. Considerando então uma superfície média referida ao terno cartesiano tri-ortogonal - $oxyz$ - com coordenadas curvilíneas α_x e α_y , indicaremos por a_x e a_y as raízes dos coeficientes da primeira forma quadrática e r_x e r_y os correspondentes raios de curvatura; assim, pode-se representar como na Fig. 3 os comprimentos dos lados de um elemento de casca, sendo que as parcelas

$$\frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} d\alpha_y d\alpha_x \quad \text{e} \quad \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} d\alpha_x d\alpha_y$$

representam os incrementos de a_x e a_y e Δ_x e Δ_y os ângulos, em oxy , entre os lados contidos nos planos oxz e oyz e aqueles que lhes são adjacentes.

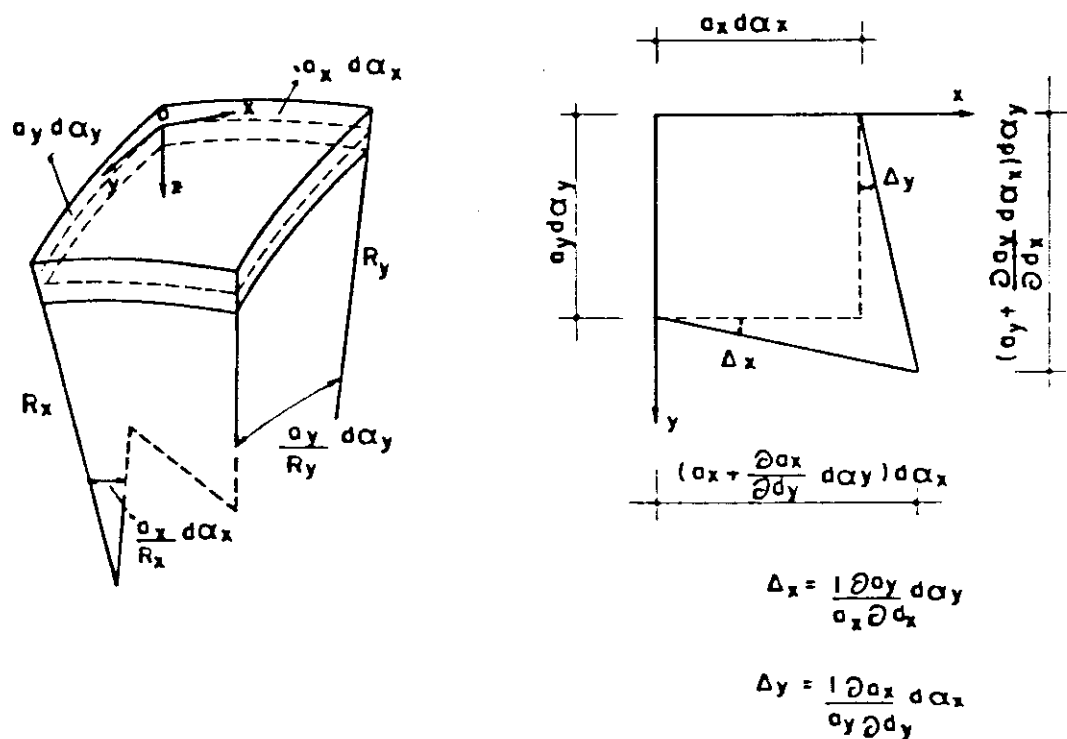


FIG. 3 - Elemento de casca, características de seus lados

Quanto ao equilíbrio, entre as solicitações internas e externas, representadas por um carregamento genérico q , estará satisfeito se forem obedecidas as condições:

$$\Sigma X = 0 \quad ; \quad \Sigma M_x = 0$$

$$\Sigma Y = 0 \quad ; \quad \Sigma M_y = 0$$

$$\Sigma Z = 0 \quad ;$$

Existiria ainda uma sexta condição $\Sigma M_z = 0$, desprezada desde que se considerou $N_{xy} = N_{yx}$ e $M_{xy} = M_{yx}$, igualdades que transformam essa equação em identidade.

De acordo com os sentidos convencionados para os esforços (Fig. 2.b), com as variações consideradas nos comprimentos dos lados do elemento de casca e desprezando infinitesimos de ordem superior, as condições de equilíbrio redundam nas equações:

$$1 - \frac{\partial}{\partial \alpha_x} (N_x a_y) - N_y \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} + N_{xy} \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} + \frac{\partial}{\partial \alpha_y} (N_{yx} a_x) - V_y \frac{a_x a_y}{r_x} + q_x a_x a_y = 0$$

$$2 - \frac{\partial}{\partial \alpha_y} (N_y a_x) - N_x \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} + N_{yx} \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} + \frac{\partial}{\partial \alpha_x} (N_{xy} a_y) - V_x \frac{a_x a_y}{r_y} + q_y a_x a_y = 0$$

$$3 - \frac{\partial}{\partial \alpha_x} (V_x a_y) + \frac{\partial}{\partial \alpha_y} (V_y a_x) + N_x \frac{a_x a_y}{r_{xy}} + N_{yx} \frac{a_x a_y}{r_{xy}} + N_y \frac{a_x a_y}{r_y} + q_z a_x a_y = 0$$

$$4 - \frac{\partial}{\partial \alpha_y} (M_y a_x) + M_x \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} - M_{yx} \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} + \frac{\partial}{\partial \alpha_x} (M_{xy} a_y) + V_y a_x a_y = 0$$

$$5 - \frac{\partial}{\partial \alpha_y} (M_{xy} a_y) + M_{xy} \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} + M_{xy} \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} - \frac{\partial}{\partial \alpha_y} (M_{yx} a_x) + V_{xy} a_x a_y = 0$$

-A-

onde q_x , q_y e q_z são os componentes do carregamento segundo os eixos x , y e z , respectivamente, e

$$\frac{1}{r_{xy}} = \frac{1}{a_x a_y} \frac{\partial^2 z}{\partial \alpha_x \partial \alpha_y}$$

Estabelecido o equilíbrio, verifica-se que a determinação dos esforços está indefinida, pois as equações são em número de cinco e as incógnitas são oito; será necessário, portanto, dispor de outras relações além das de equilíbrio para que seja possível a resolução do sistema. As equações complementares serão obtidas através das relações tensões e deformações ou entre esforços e deslocamentos, as quais serão estabelecidas a seguir.

3.3 - Relações Deformações-Deslocamentos

Para o elemento de casca em sua posição deformada, serão relacionados na superfície média os deslocamentos de seus pontos e suas deformações.

Sejam u , v e w as componentes, segundo os eixos x , y , z , do deslocamento no ponto coincidente com a origem do sistema de coordenação e nos demais cruzamentos dos lados do elemento, com os respectivos incrementos, as deformações correspondentes são:

$$\begin{aligned} \epsilon_{xo} &= \frac{1}{a_x} \frac{\partial u}{\partial \alpha_x} + \frac{v}{a_x a_y} \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} - \frac{w}{r_x} \\ \epsilon_{yo} &= \frac{1}{a_y} \frac{\partial v}{\partial \alpha_y} + \frac{u}{a_x a_y} \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} - \frac{v}{r_y} \\ \gamma_{xvo} &= \frac{1}{a_x} \frac{\partial v}{\partial \alpha_x} + \frac{1}{a_y} \frac{\partial u}{\partial \alpha_y} - \frac{v}{a_x a_y} \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_y} - \frac{2}{r_{xy}} \end{aligned}$$

As rotações da superfície média em torno dos eixos y e x , são respectivamente:

$$\phi_x = \frac{u}{r_x} + \frac{\partial w}{\partial \alpha_x} + \frac{v}{r_{xy}} ; \quad \phi_y = \frac{y}{r_y} + \frac{\partial w}{\partial \alpha_y} + \frac{u}{r_{xy}}$$

e as variações de curvatura:

$$\chi_x = \frac{\partial \phi_x}{\partial \alpha_x} + \frac{\phi_y}{a_x} \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} ; \quad \chi_y = \frac{1}{a_y} \frac{\partial \phi_y}{\partial \alpha_y} + \frac{\phi_x}{a_x} \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x}$$

$$2\chi_{xy} = \frac{1}{a_y} \frac{\partial \phi_x}{\partial \alpha_y} + \frac{1}{a_x} \frac{\partial \phi_y}{\partial \alpha_x} - \frac{\phi_x}{a_x} \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} - \frac{\phi_y}{a_x} \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x}$$

-B-

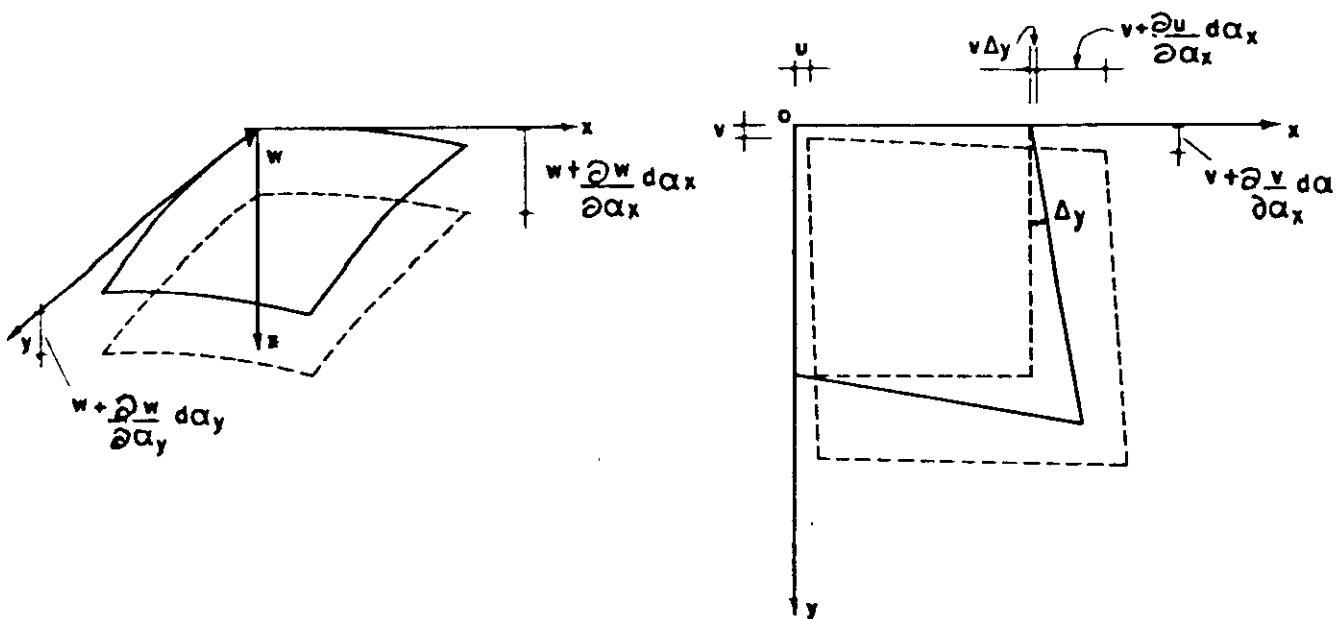


FIG. 4 - Deslocamentos em um elemento de casca

3.4 - Relações Tensões-Deformações

Supondo o material da estrutura, isótropo, homogêneo e linearmente elástico, com módulo de deformação longitudinal E e coeficiente de Poisson ν , admite-se:

$$\sigma_x = \frac{1}{(1-\nu^2)} (\epsilon_{x0} + \nu \epsilon_{y0}) - z (\chi_x + \nu \chi_y)$$

$$\sigma_y = \frac{1}{(1-\nu^2)} (\epsilon_{y0} + \nu \epsilon_{x0}) - z(\chi_y + \nu \chi_x)$$

$$\tau_{xy} = G(\gamma_{xy0} - 2z\chi_{xy}) \quad \text{com} \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

-C-

3.5 - Relações Esforços-Deslocamentos

Substituindo as relações B e C nas expressões gerais de equilíbrio -A-:

$$N_x = K \frac{\partial u}{a_x \partial \alpha_x} + \frac{\nu \partial a_x}{a_x a_y \partial \alpha_y} - \frac{w}{r_x} + \nu \frac{\partial v}{a_x \partial \alpha_y} + \frac{u \partial a_y}{a_x a_y \partial \alpha_x} - \frac{w}{r_y}$$

$$N_y = K \frac{\partial v}{a_y \partial \alpha_y} + \frac{u \partial a_y}{a_x a_y \partial \alpha_x} - \frac{w}{r_y} + \nu \frac{\partial u}{a_x \partial \alpha_x} + \frac{\nu \partial a_x}{a_x a_y \partial \alpha_y} - \frac{w}{r_x}$$

$$N_{xy} = N_{yx} = Gh \frac{\partial v}{a_x \partial \alpha_x} + \frac{\partial u}{a_y \partial \alpha_y} - \frac{u \partial a_x}{a_x a_y \partial \alpha_y} - \frac{\nu \partial a_y}{a_x a_y \partial \alpha_x} - \frac{2w}{r_{xy}}$$

$$M_x = -D \frac{\partial \phi_x}{a_x \partial \alpha_x} + \frac{\phi_y \partial a_x}{a_x a_y \partial \alpha_y} + \nu \frac{\partial \phi_y}{a_y \partial \alpha_y} + \frac{\phi_x \partial a_y}{a_x a_y \partial \alpha_x}$$

$$M_y = -D \frac{\partial \phi_y}{a_y \partial \alpha_y} - \frac{\phi_x \partial a_y}{a_x a_y \partial \alpha_x} + \nu \frac{\partial \phi_x}{a_x \partial \alpha_x} + \frac{\phi_y \partial a_x}{a_x a_y \partial \alpha_y}$$

$$M_{xy} = -M_{yx} = \frac{D(1-\nu)}{2} \frac{\partial \phi_x}{a_y \partial \alpha_y} + \frac{\partial \phi_y}{a_x \partial \alpha_x} - \frac{\phi_x \partial a_x}{a_x a_y \partial \alpha_y} - \frac{\phi_x \partial a_y}{a_x a_y \partial \alpha_x}$$

sendo

$$K = \frac{Eh}{(1-\nu^2)} \quad \text{e} \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)},$$

respectivamente as rigidezes da casca a solicitações axiais e às de flexão.

Tem-se então um sistema constituído de onze equações e onze incógnitas, cuja resolução permite teoricamente o conhecimento dos esforços internos e dos deslocamentos em qualquer estrutura em casca, pois a formulação é geral. Contudo, aproveitando-se das características de geometria e de apoio de cada forma em casca, geralmente são introduzidas simplificações nessa formulação, tornando específico o problema, permitindo maior agilização no cálculo.

Em particular, objetivando o cálculo de parabolóides elípticos, será abordada a seguir a teoria das cascas abatidas, cujo desenvolvimento será feito a partir das expressões gerais (A e D) e que servirá inclusive para exemplificar o dito acerca das simplificações na formulação geral.

4. TEORIA DAS CASCAS ABATIDAS

4.1 - Hipóteses básicas. Equações gerais

Com a exposição, ainda que sucinta, da teoria das cascas abatidas, a ser feita a seguir, pretende-se apresentar um panorama geral dessas estruturas, as hipóteses básicas na formulação de sua teoria, as cascas que podem ser consideradas como tais, suas particularidades e as equações diferenciais que regem seus comportamentos, sendo que o objetivo principal desta introdução é o de fornecer subsídios para o cálculo de cascas de translação abatidas, com ênfase nos parabolóides elípticos.

A análise a ser feita é baseada na teoria das cascas abatidas, cuja teoria foi formulada, entre outros, por Vlasov. Nesta teoria, ao lado das hipóteses fundamentais válidas para as cascas em geral (ver item 2), admite-se que:

- a) a inclinação da tangente à superfície média é pequena (normalmente para as coberturas é tomado como referência o plano horizontal), Baikov (8) cita inclinação máxima de 18° em qualquer ponto;
- b) a curvatura ($1/r$) da superfície é muito pequena e pode ser desprezada comparada à unidade;
- c) os contornos da casca são tais que as cargas de superfície são suportadas essencialmente pelos esforços N_x , N_y e N_{xy} e, devido ao abatimento da casca, pode-se admitir que as deformações transversais são bastante superiores às demais que ocorrem na superfície média.

Serão agora examinadas as expressões A e D e nelas introduzidas as simplificações de acordo com essas hipóteses.

A hipótese -a- permite que sejam consideradas tão somente as componentes radiais dos carregamentos de superfície.

As hipóteses -b e c- devem ser analisadas em conjunto. Por -b-, os termos contendo V nas equações A.1 e A.2 e os em N na equação A.3 são desprezíveis, assim como os termos em w em D.1 e u em D.4,5,6. Contudo, considerando-se a hipótese c, que por analogia da casca com um arco abatido (no qual as tensões predominantes são axiais, porém as deformações principais são verticais), os componentes transversais dos esforços N_x , N_y e N_{xy} não são desprezíveis face às variações das cortantes transversais V_x e V_y .

Sendo assim, são desprezados os termos em V quando se faz $\Sigma X = \Sigma Y = 0$, mas não os termos em N de $\Sigma Z = 0$. Da mesma forma, é desprezada a influência dos deslocamentos u e v nos esforços de flexão, mas não a influência de w nos esforços normais.

Com essas simplificações, as expressões A e D reduzem-se respectivamente a:

$$1 - \frac{\partial N_x}{a_x \partial \alpha_x} + \frac{\partial N_{yx}}{a_y \partial \alpha_y} + q_x = 0$$

$$2 - \frac{\partial N_y}{a_y \partial \alpha_y} + \frac{\partial N_{xy}}{a_x \partial \alpha_x} + q_y = 0$$

$$3 - \frac{\partial V_x}{a_x \partial \alpha_x} + \frac{\partial V_y}{a_y \partial \alpha_y} + \frac{N_x}{r_x} + 2 \frac{N_{xy}}{r_{xy}} + \frac{N_y}{r_y} + q_z = 0$$

$$4 - \frac{\partial M_y}{a_y \partial \alpha_y} + \frac{\partial M_{xy}}{a_x \partial \alpha_x} + v_y = 0$$

$$5 - \frac{\partial M_x}{a_x \partial \alpha_x} + \frac{\partial M_{xy}}{a_y \partial \alpha_y} + v_x = 0$$

-E-

e

$$1 - F_x = K \left[\frac{\partial u}{a_x \partial \alpha_x} - \frac{w}{r_x} + v \left(\frac{\partial v}{a_y \partial \alpha_y} - \frac{w}{r_y} \right) \right]$$

$$2 - F_y = K \left[\frac{\partial v}{a_y \partial \alpha_y} - \frac{w}{r_y} + v \left(\frac{\partial u}{a_x \partial \alpha_x} - \frac{w}{r_x} \right) \right]$$

$$3 - F_{xy} = Gh \left(\frac{\partial v}{a_x \partial \alpha_x} + \frac{\partial u}{a_y \partial \alpha_y} - \frac{2w}{r_{xy}} \right)$$

$$4 - M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{a_x^2 \partial \alpha_x^2} + v \frac{\partial^2 w}{a_y^2 \partial \alpha_y^2} \right)$$

$$5 - M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{a_y^2 \partial \alpha_y^2} + v \frac{\partial^2 w}{a_x^2 \partial \alpha_x^2} \right)$$

$$6 - M_{xy} = -M_{yx} = D(1-v) \frac{\partial^2 w}{a_x a_y \partial \alpha_x \partial \alpha_y}$$

-F-

Os erros cometidos pelo uso da teoria das cascas abatidas com essas simplificações, assim como suas limitações, não são bem definidos. Contudo, para cascas que tenham relação flecha/lado ou diâmetro menor que 1/5, a teoria é suficientemente precisa, conforme é comentado em Vlasov (62); discussão ampla a respeito desse limite pode ser encontrada na referência 36, vol. 2.

4.2 - Equações de Vlasov para cascas abatidas

A solução do problema das cascas abatidas pode ser obtida reduzindo o sistema de equações E e F a um mais compacto, no qual esteja envolvido número menor de incógnitas. Tal sistema, dito reduzido, pode ser expresso em função dos esforços ou dos deslocamentos e de quatro formas distintas, ou seja:

- 1) o sistema constituído de três equações em função de u , v e w ; duas dessas equações sendo de segunda ordem e a terceira de quarta ordem;
- 2) o sistema constituído de duas equações de quarta ordem, envolvendo uma função de tensão de Airy e uma em função da elástica w ;
- 3) uma equação de oitava ordem envolvendo uma função de tensão ou de deslocamento;
- 4) uma equação diferencial complexa de quarta ordem.

Serão abordadas no presente estudo apenas as segunda e terceira formulações.

Assim, das expressões F - 1, 2, 3, podem ser obtidas as relações:

$$1 - N_x - \nu N_y = K(1-\nu^2) \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{w}{r_x} \right)$$

$$2 - N_y - \nu N_x = K(1-\nu^2) \left(\frac{\partial v}{a_y \partial \alpha_y} - \frac{w}{r_y} \right).$$

$$3 - 2(1+\nu) N_{xy} = K(1-\nu^2) \left(\frac{\partial v}{a_x \partial \alpha_x} + \frac{\partial u}{a_y \partial \alpha_y} - \frac{2w}{r_{xy}} \right)$$

que derivadas duas vezes e combinadas entre si, resultam:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 (N_x - \nu N_y)}{a_y^2 \partial \alpha_y^2} - \frac{2(1+\nu) \partial^2 N_{xy}}{a_x a_y \partial \alpha_x \partial \alpha_y} + \frac{\partial^2 (N_y - \nu N_x)}{a_x^2 \partial \alpha_x^2} = \\ & = -K(1-\nu^2) \left[\frac{\partial^2}{a_x^2 \partial \alpha_x^2} \left(\frac{w}{r_y} \right) - \frac{2\partial^2}{a_x a_y \partial \alpha_x \partial \alpha_y} \left(\frac{w}{r_{xy}} \right) + \frac{\partial^2}{a_y^2 \partial \alpha_y^2} \left(\frac{w}{r_x} \right) \right] \end{aligned}$$

-G-

Admitindo r_x , r_y e r_{xy} como constantes, pode-se fazer:

$$\nabla_r^2 = \left(\frac{\partial^2}{r_y a_x^2 \partial \alpha_x^2} - \frac{2\partial^2}{r_{xy} a_x a_y \partial \alpha_x \partial \alpha_y} + \frac{\partial^2}{r_y a_y^2 \partial \alpha_y^2} \right)$$

Satisfazendo as condições E1 e E2, será introduzida uma função de tensão -F- para representar os esforços N_x , N_y e N_{xy} , ou seja:

$$N_x = \frac{\partial^2 F}{a_y^2 \partial \alpha_y^2} - \int a_x a_x d\alpha_x; \quad N_y = \frac{\partial^2 F}{a_x^2 \partial \alpha_x^2} - \int a_y a_y d\alpha_y$$

$$N_{xy} = - \frac{\partial^2 F}{a_x a_y \partial \alpha_x \partial \alpha_y}$$

-H-

Substituindo-se as expressões de -H- e introduzindo o operador ∇^2 (definido abaixo) em -G-, tem-se:

$$\nabla^4 F + K(1-\nu^2) \nabla_r^2 w = \int \frac{\partial^2 a_x}{a_y^2 \partial \alpha_y^2} a_x d\alpha_x + \int \frac{\partial^2 a_y}{a_x^2 \partial \alpha_x^2} a_y d\alpha_y +$$

$$-v \left(\frac{\partial q_x}{a_x \partial \alpha_x} + \frac{\partial q_y}{a_y \partial \alpha_y} \right)$$

-1-

onde

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{a_x^2 \partial \alpha_x^2} + \frac{\partial^2}{a_y^2 \partial \alpha_y^2}$$

é o operador Laplaciano, sendo válida a relação $\nabla^2 \nabla^2 = \nabla^4$.

Agora, introduzindo os valores de V_x e V_y das equações E.4 e E.5 em E.3, tem-se:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 M_x}{a_x^2 \partial \alpha_x^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{a_x a_y \partial \alpha_x \partial \alpha_y} + \frac{\partial^2 M_y}{a_y^2 \partial \alpha_y^2} + \frac{M_x}{r_x} + 2 \frac{N_{xy}}{r_{xy}} + \\ & + \frac{N_y}{r_y} + q_z = 0 \end{aligned}$$

que com os valores de M_x , M_y e M_{xy} de F.4,5,6, torna-se:

$$\begin{aligned} & -\nabla^4 w + \frac{1}{D} \left(\frac{N_x}{r_x} + 2 \frac{N_{xy}}{r_{xy}} + \frac{N_y}{r_y} \right) = -\frac{q_z}{D} + \frac{1}{Dr_x} \int q_x a_x d\alpha_x + \\ & + \frac{1}{Dr_y} \int q_y a_y d\alpha_y \end{aligned}$$

ou em função de F

$$\nabla^4 w - \frac{1}{D} \nabla^2 F = -\frac{1}{D} \left(\frac{1}{r_x} \int q_x a_x d\alpha_x + \frac{1}{r_y} \int q_y a_y d\alpha_y \right) + \frac{q_z}{D}$$

-2-

O cálculo dos esforços e deslocamentos, agora está condicionado à resolução do sistema de equações diferenciais formado por 1 e 2, denominadas equações de Vlasov para cascas abatidas, com a primeira delas representando compatibilidade de deslocamentos e a segunda equilíbrio entre as ações.

$$1) \quad \nabla^4 F + K(1-\nu^2) \nabla_4^2 w = f_1(q)$$

$$2) \quad \nabla^4 w - \frac{1}{D} \nabla_r^2 F = f_2(q)$$

com $f_1(q)$ e $f_2(q)$ representando, respectivamente, os segundos membros de 1 e de 2.

Observe-se que as expressões 1 e 2 são válidas especificamente para cascas de curvatura constante. Se nessas equações for feito $r_x = r_y = r_{xy} = \infty$ teremos $\nabla^4 F = f_1(q)$ (equação das chapas) e $\nabla^4 w = -\frac{q}{D}$ (equações das placas), limite que tendem as cascas com o decréscimo das curvaturas.

Outras características desse sistema serão evidenciadas oportunamente.

4.3 - Equação de oitava ordem para as cascas abatidas

As equações de Vlasov, de quarta ordem, podem ser condensadas em uma de oitava, bastando para isso eliminar uma das incógnitas. Por exemplo, se for introduzido na primeira delas o operador ∇_r^2 e na segunda ∇^4 , combinando-as a seguir, resulta:

$$\nabla^4 \nabla^4 w + \frac{12(1-\nu^2)}{h^2} \nabla_r^2 \nabla^2 w = \frac{1}{D} \nabla_r^2 f_1(q) + \nabla^4 f_2(q)$$

ou do mesmo modo, introduzindo ∇^4 e ∇_r^2 respectivamente na primeira e segunda equação, eliminando w e obtendo:

$$\nabla^4 \nabla^4 F + \frac{12(1-\nu^2)}{h^2} \nabla_r^2 \nabla^2 F = \frac{1}{D} \nabla_r^2 f_1(q) + \nabla^4 f_2(q)$$

Resolvendo uma ou outra equação, tem-se, pelas relações F e E , conhecidos os esforços e deslocamentos nas cascas abatidas.

4.4 - Resolução da equação diferencial de oitava ordem.

Processo de Bouma

Para a integração da equação de oitava ordem em w ou em F existem diversos processos como as diferenças finitas, os polinômios de diferentes ordens, as séries trigonométricas duplas e simples e outros. São processos numéricos utilizados pela dificuldade de w e F serem postos explicitamente em função das variáveis x e y .

A solução a ser apresentada neste trabalho, é a que foi desenvolvida por Bouma (12), que por analogia com a resolução conhecida para as placas resolveu a equação usando séries do tipo proposto por Levy. Será abordada a essência das teorias de membrana (que permite evidenciar algumas particularidades da estrutura analisada) e a de flexão para os parabolóides elípticos, segundo o processo especificado.

5. OS PARABOLÓIDES ELÍPTICOS SOBRE BASE RETANGULAR

A estrutura a ser analisada, em detalhes, é um parabolóide elíptico sobre base retangular, cujas características geométricas e estáticas serão descritas a seguir.

5.1 - Geometria

O parabolóide elíptico é uma casca de translação com curvatura gaussiana ($1/r_x r_y$) positiva, cuja superfície pode ser imaginada como sendo formada pela translação de um arco de parábola (geratriz) sobre um outro fixo (diretriz), estando ambos situados em planos verticais.

Interceptando essa superfície por um plano horizontal em $z = \text{cte.}$, a figura geométrica formada em zx ou em zy é uma elipse, daí o parabolóide ser denominado elíptico.

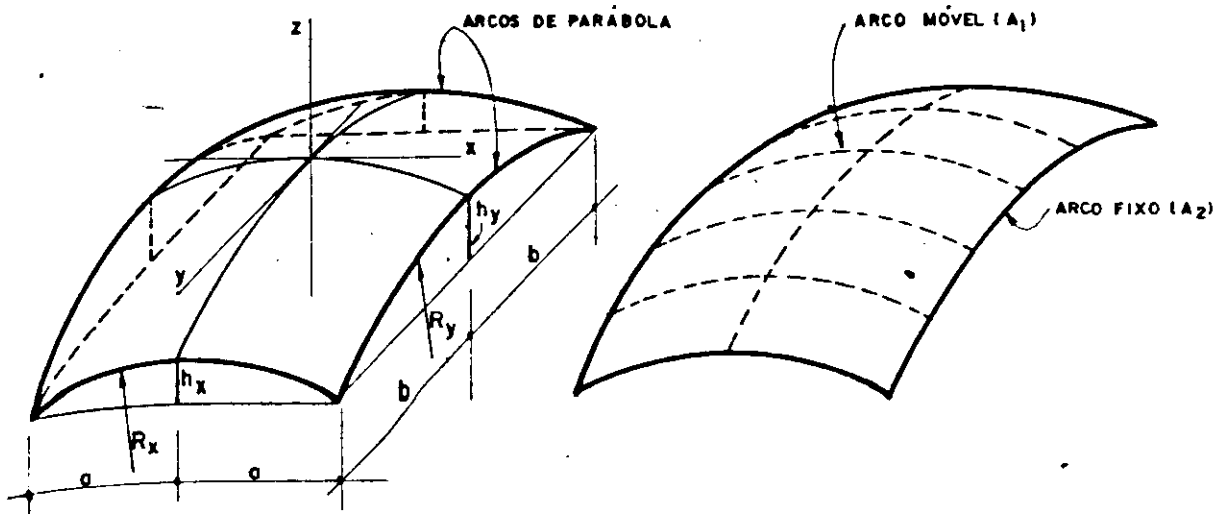


FIG. 5- Superfície e geometria do parabolóide elíptico sobre base retangular.

Se os arcos A_1 e A_2 forem idênticos, a superfície pode também ser gerada pela rotação de um deles em torno do eixo $-z-$, desde que a seguir seja seccionado por quatro planos verticais e paralelos dois a dois.

Sendo uma superfície de translação, esta pode ser descrita explicitamente por uma função do tipo $z(x,y) = z_1(x) + z_2(y)$, e para as condições da Fig. 5.b tem-se:

$$z_1(x) = \left(\frac{f_x}{2}\right) x^2 \quad \text{e} \quad z_2(y) = \left(\frac{f_y}{2}\right) y^2$$

e então,

$$z(x,y) = \frac{f_x}{2} x^2 + \frac{f_y}{2} y^2$$

Se a casca for abatida (obedecendo à primeira das hipóteses e à observação final do item 4.1), pode-se fazer:

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 \approx \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 \approx 0$$

e com isso,

$$\frac{1}{r_x} = \frac{d^2 z / dx^2}{[1 + (dz/dx)^2]^{3/2}}$$

pode ser colocado como:

$$\frac{1}{r_x} = \frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{2fx}{a^2}$$

e da mesma forma:

$$\frac{1}{r_y} = \frac{2fy}{b^2}$$

E então,

$$z(x,y) = \frac{1}{2r_x} x^2 + \frac{1}{2r_y} y^2$$

ou se os arcos A_1 e A_2 forem idênticos

$$z(x,y) = \frac{1}{2r} (x^2 + y^2).$$

Se os arcos geradores da superfície apresentarem concavidades em sentidos opostos, o parabolóide será hiperbólico e sua superfície é descrita por:

$$z = \left(\frac{1}{2r_x}\right) x^2 - \left(\frac{1}{2r_y}\right) y^2$$

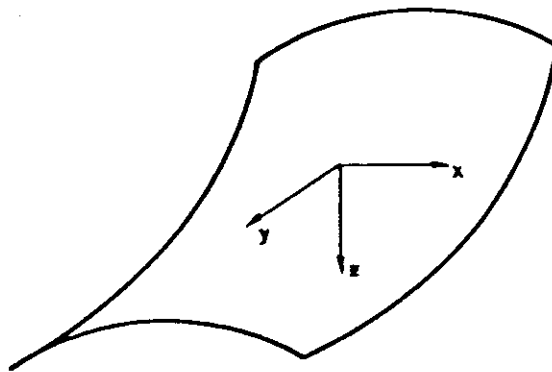


FIG. 6 - Parabolóide hiperbólico

Caso a superfície seja uma calota esférica (raio constante) abatida, as diferenças geométricas serão pequenas e aplica-se a ela, com boa precisão, a mesma teoria de cálculo dos parabolóides, a ser desenvolvida.

5.2 - Teoria de Membrana

Como primeira aproximação no cálculo das estruturas em casca, é comum se optar por uma solução aproximada, na qual se admite que aquelas, por analogia com uma membrana, não resistam a esforços de flexão e torção. A hipótese é tanto mais válida quanto menores forem suas espessuras; por outro lado, depende fundamentalmente da disposição do sistema de apoio em relação à casca, existindo tão somente esforços normais (inclusive nos apoios) situados no plano tangente à superfície média, considerados uniformemente distribuídos sobre a espessura.

Neste caso, para o cálculo das solicitações internas, será necessário dispor somente das condições de equilíbrio, sem necessidade das de compatibilidade de deslocamentos.

As equações gerais das cascas abatidas (E) com as simplificações da teoria de membrana acrescidas das características das cascas de translação ($a_x = r_x$; $a_y = r_y$; $r_{xy} = \infty$), ficam reduzidas a:

$$1 - r_y \frac{\partial N_x}{\partial \alpha_x} + r_y \frac{\partial N_{yx}}{\partial \alpha_y} + q_x r_x r_y = 0$$

$$2 - r_x \frac{\partial N_y}{\partial \alpha_y} + r_y \frac{\partial N_{xy}}{\partial \alpha_x} + q_y r_x r_y = 0$$

$$3 - r_y N_y + r_x N_x + q_z r_x r_y = 0$$

Ac invés de ser tentada a resolução deste sistema que representa o equilíbrio entre as ações num elemento

curvo, pode-se simplificar o problema adotando como referência o sistema de coordenadas cartesiano, projetando nestes os esforços de membrana do elemento curvo e estabelecendo a seguir o equilíbrio segundo x , y e z . A Fig. 7 abaixo, mostra um elemento de casca com os esforços de membrana e suas projeções no plano oxy . Essa forma de resolução é devida a Pucher(11).

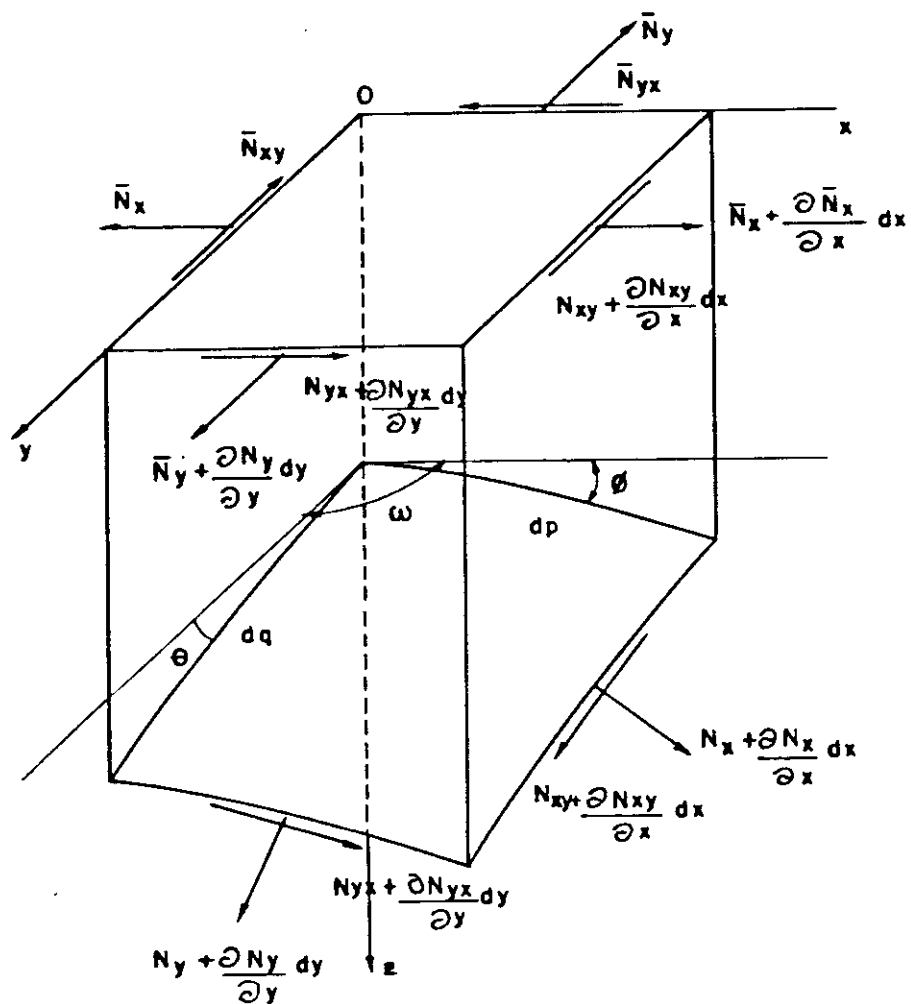


FIG. 7 — Esforços de membrana projetadas em oxy

5.2.1 - Relações geométricas

O ângulo ω é dado pela intersecção de planos normais a x e y com a superfície média do elemento de casca, sua relação com os ângulos ϕ e θ pode ser obtida pelo produto escalar dos vetores unitários que contêm as direções, em oxy, dp e dq.

$$\vec{u}_{dp} \cdot \vec{u}_{dq} = |\vec{u}_{dp}| \cdot |\vec{u}_{dq}| \cdot \cos \omega = \cos \omega$$

com

$$\vec{u}_{dp} = (\cos \phi; 0; \sin \phi) \quad \vec{u}_{dq} = (0; \cos \theta; \sin \theta)$$

seguinte-se as relações:

- a) $\cos \omega = \sin \phi \sin \theta$
- b) $dx = dp \cos \phi$
- c) $dy = dq \cos \theta$
- d) $dA = \frac{dx \, dy}{\cos \phi \cos \theta}$ - área do elemento de casca
- e) $\overline{dA} = dx \, dy$ - área do elemento de casca projetado
- f) $\frac{\partial z}{\partial x} = \tan \phi$
- g) $\frac{\partial z}{\partial y} = \tan \theta$

5.2.2 - Relações entre os esforços no elemento curvo e no projetado em oxy

$$a) \quad \overline{N}_x = \frac{\cos \theta}{\cos \phi} N_x \quad ; \quad b) \quad \overline{N}_y = \frac{\cos \phi}{\cos \theta} N_y \quad ; \quad c) \quad N_{xy} = \overline{N}_{xy}$$

sendo $\overline{N}$ = esforço de membrana projetado em oxy.

5.2.3 - Relações de equilíbrio. Cálculo dos esforços

$$1) \quad \Sigma F_x = 0 \quad \therefore \quad \frac{\partial \bar{N}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{N}_{xy}}{\partial y} + q_x = 0$$

$$2) \quad \Sigma F_y = 0 \quad \therefore \quad \frac{\partial \bar{N}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{N}_{xy}}{\partial x} + q_y = 0$$

$$3) \quad \Sigma F_z = 0 \quad \therefore \quad \bar{N}_x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \bar{N}_y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2\bar{N}_{xy} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$$

$$= -\bar{q}_z + \bar{q}_x \frac{\partial z}{\partial x} + \bar{q}_y \frac{\partial z}{\partial y}$$

expressando os esforços em termos da função de F,

$$\bar{N}_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \bar{q}_x dx \quad ; \quad \bar{N}_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - q_y dy \quad ; \quad \bar{N}_{xy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$

e combinando as três equações, resulta:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\bar{q}_z + \bar{q}_x \frac{\partial z}{\partial x} +$$

$$+ \bar{q}_y \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \int \bar{q}_x dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \int \bar{q}_y dy$$

No caso do parabolóide elíptico

$$z(x,y) = \frac{x^2}{2r_x} + \frac{y^2}{2r_y}$$

e supondo, como acontece normalmente, ser $\bar{q}_x = \bar{q}_y = 0$, a equação diferencial reduz-se a:

$$\frac{1}{r_x} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{1}{r_y} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -\bar{q}_z$$

ou, para os parabolóides hiperbólicos:

$$-\frac{\partial^2 F}{r_y \partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{r_x \partial y^2} = -\bar{q}_z, \text{ desde que } r_y < 0$$

De forma genérica, a equação diferencial que expressa o equilíbrio num elemento de casca de translação com diretriz parabólica, pode ser representado por:

$$\frac{1}{p_2} \frac{\partial^2 F}{y^2} + \frac{1}{p_1} \frac{\partial^2 F}{x^2} = -q_z \quad \text{-A2-}$$

se:

$$p_2 = r_y ; p_1 = r_x \rightarrow \text{parabolóides elípticos}$$

$$p_2 = -r_y ; p_1 = r_x \rightarrow \text{parabolóides hiperbólicos}$$

$$p_2 = \infty ; p_1 = r_x \rightarrow \text{casca cilíndrica}$$

A equação A1 pode ser obtida diretamente das equações de Vlasov para as cascas abatidas, ou mais especificamente, daquela que expressa o equilíbrio entre as ações (ver 4.2).

$$\nabla^4 w - \frac{1}{D} \nabla^2 F = \frac{q_z}{D} - \frac{1}{D} \left(\frac{1}{r_x} \int q_x a_x dx + \frac{1}{r_y} \int q_y a_y dy \right)$$

que com as simplificações da teoria de membrana e com as características das cascas de translação e $q_x = q_y = 0$ torna-se:

$$\nabla_r^2 F = -q_z \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 F}{r_x \partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{r_y \partial x^2} = -q_z$$

O problema agora consiste em encontrar uma função de tensão F que satisfaça a equação A2 e também as condições de contorno, dependentes das situações de apoio.

Sendo a equação A1 linear, tem-se que sua solução é composta de uma solução particular F_0 mais a solução da equação homogênea. Passemos então à resolução de A2 segundo o apresentado em Bouma

Uma forma de expressar $\bar{q}_z$ é através de séries trigonométricas simples ou duplas, com estas últimas oferecendo maiores opções de forma de carregamento, inclusive os descontínuos e os concentrados sobre a superfície, exigindo, contudo, número mais elevado de termos que as séries simples; sendo que para as condições usuais de carregamento, a utilização destas para representá-lo atende às necessidades.

Se o carregamento $\bar{q}_z$ for expresso por:

$$\bar{q}_z(x) = \sum_m C_m \cos \alpha_m x \quad \text{com } \alpha_m = \frac{m\pi}{2a}, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

$$C = \frac{2}{a} \int_0^a \cos \alpha_m x \, dx, \quad \text{ou} \quad C_m = \frac{4q}{m\pi} \sin \alpha_m a$$

$$q = \bar{q}_z$$

e for substituído em A2, esta fica:

$$\frac{\partial^2 F}{p_2 \partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{p_1 \partial y^2} = - \frac{4q}{m\pi} \sum_m \sin \frac{m\pi}{2} \cos \alpha_m x$$

e a solução particular, dependente apenas de x , é:

$$F_0 = \frac{4qp_2}{m\pi\alpha_m^2} \sum_m \sin \frac{m\pi}{2} \cos \alpha_m x$$

Solução da equação homogênea

$$\frac{\partial^2 F}{p_2 \partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{p_1 \partial y^2} = 0$$

Considerando as condições de apoio em $x = \pm a$ e que as derivadas são de ordem par, pode-se adotar para $-F-$ na equação homogênea, a função:

$$F_1 = \sum_m F_1(y) \cos \alpha_m x$$

e com isso

$$\frac{\partial^2 F}{p_1 \partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{p_2 \partial x^2} = 0$$

fica

$$\frac{1}{p_1} F_1''(y) - \frac{\alpha_m^2}{p_2} F_1(y) = 0$$

ou

$$F_1''(y) - \beta_m^2 F_1(y) = 0 \quad \text{com} \quad \beta_m = \alpha_m \sqrt{p_1/p_2}$$

e a solução da equação será do tipo

$$F_1 = \sum_m (A_m \cosh \beta_m y + B_m \sinh \beta_m y) \cos \alpha_m x$$

para os parabolóides elípticos, ou

$$F_1 = \sum_m (A_m \cos \beta_m y + B_m \sen \beta_m y) \cos \alpha_m x$$

para os parabolóides hiperbólicos.

A solução geral $-F_0 + F_1-$ para os parabolóides elípticos será:

$$F = \sum_m (A_m \cosh \beta_m y + B_m \sinh \beta_m y) \cos \alpha_m x + \\ + \frac{4qr_y}{m\pi\alpha_m} \sum_m \sen \frac{m\pi}{2} \cos \alpha_m x$$

A solução $-F-$ satisfaz automaticamente a condi

ção de contorno em $x = \pm a$, pela forma assumida para a função de tensão. Se as condições de apoio em $y = +b$ e $y = -b$ forem as mesmas, a constante $-B-$ será nula e portanto, para satisfazer às condições de contorno em $y = \pm b$, basta escolher valor conveniente para A .

Para o parabolóide elíptico serão distinguidos dois casos:

- a) o parabolóide em $y = \pm b$ em tímpanos capazes de suportar esforços apenas em seus planos, resultando na condição:

$$\bar{N}_y(y=\pm b) = 0$$

Lembrando que

$$\bar{N}_y = -\frac{2F}{x^2},$$

tem-se pela condição acima,

$$A_m = -\frac{4qr_y}{m\pi \cosh \beta_m b} \sin \frac{m\pi}{2}$$

e daí:

$$r = \frac{4q}{m\pi \alpha_m} \sin \frac{m\pi}{2} r_y \left(1 - \frac{\cosh \beta_m y}{\cosh \beta_m b}\right) \cos \alpha_m x$$

donde saem:

$$\bar{N}_x = -\beta_m^2 \sum_m A_m \cosh \beta_m y \cos \alpha_m x$$

$$\bar{N}_y = \left(\sum_m A_m \beta_m^2 \cosh \beta_m y + \frac{4qr_y}{m\pi} \sum_m \sin \frac{m\pi}{2} \right) \cos \alpha_m x$$

$$\bar{N}_{xy} = \beta_m \alpha_m \sum_m A_m \sinh \beta_m y \sin \alpha_m x$$

que são as expressões que permitem obter nos parabolóides elípticos, os esforços de membrana num sistema retangular de coordenadas. Para serem obtidos os

esforços na superfície curva, basta fazer:

$$N_x = \frac{\cos\theta}{\cos\phi} \bar{N}_x ; \bar{N}_y = \frac{\cos\phi}{\cos\theta} \bar{N}_y \text{ e } N_{xy} = \bar{N}_{xy}$$

ou se for feito

$$k = \frac{\cos\theta}{\cos\phi} = \frac{r_y}{r_x} \sqrt{\frac{r_x^2 + x^2}{r_y^2 + y^2}}$$

$$N_x = k\bar{N} ; N_y = \frac{1}{k} \bar{N}_y ; N_{xy} = \bar{N}_{xy}$$

b) Parabolóide completamente livre em $y = \pm b$.

Neste caso, as condições nas bordas de $y = \pm b$, serão

$$\bar{N}_x = 0 \text{ e } \bar{N}_{xy} = 0$$

Existindo apenas uma constante (A_m), não será possível satisfazer a essas duas condições simultaneamente, não sendo portanto a solução de membrana para essas condições de apoio. Analisando fisicamente o problema, essa impossibilidade de resolução decorre do fato de nas bordas livres, não serem respeitadas as condições de membrana, existindo, como se verá, nas periferias do contorno, elevadas trações.

5.2.4 - Análise dos resultados obtidos e considerações práticas

Em se tratando de obter resultados práticos, com feição de tabelas, etc., as expressões em série para os esforços apresentam rápida convergência, pois desde que os termos tenham sinais alternados, o fator $1/n$ já fornece certa convergência. Existe ainda o quociente entre duas funções hiperbólicas ($\cosh\beta_m y / \cosh\beta_m b$), que para $0 < x < a$

é aproximadamente igual a $e^{\beta(y-b)}$, função que decresce ex
ponencialmente.

Para valores de $f_x > f_y$, as séries convergem ra
pidamente, sendo necessários poucos termos nas séries para
que forneçam resultados com precisão satisfatória.

Na expressão que fornece o esforço cisalhante
 N_{xy} , o fator $\sin(m\pi y/2b)$ é alternadamente +1 e -1, cancelando
o sinal também alternado de $\sin(m\pi/2)$ e tornando diver
gente a série, o que pode ser evitado desde que esta seja
colocada na forma abaixo:

$$\bar{N}_{xy} = - \frac{qab}{\sqrt{f_x f_y}} \frac{1}{2\pi} \log \left(\sec \frac{\pi y}{2b} + \operatorname{tg} \frac{\pi y}{2b} \right)^2 +$$

$$- \frac{2}{\pi} \sum_m (1 - \operatorname{tg} \beta_m a) \sin \frac{m\pi}{2} \operatorname{sen} \alpha_m y$$

Para valores de $f_x/f_y > 1$ tem-se $\operatorname{tg} \beta a \approx 1$, com
o segundo termo da expressão podendo ser desprezado, a me
nos do valor para $m = 1$, o que torna a série rapidamente
convergente.

Observe-se que nos cantos ($x = \pm a$; $y = \pm b$), ocor
re ser

$$\sec \left(\frac{\pi y}{2b} \right) = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi y}{2b} \right) = \infty \text{ e portanto } N_{xy} \rightarrow \infty$$

Esse resultado obtido nos cantos para $\bar{N}_{xy}$ não
significa uma aberração nem erro cometido no processo de
resolução adotado, mas indica uma singularidade real do es
tado de tensão e que pode ser explicada:

- quando uma superfície é de translação, a projeção ho
rizontal de um elemento dessa superfície no sistema
de coordenadas cartesiano é um retângulo, cujos lados
opostos são rigorosamente paralelos e sendo assim, os
esforços de cisalhamento N_{xy} não podem contribuir pa
ra o equilíbrio vertical.

Acontece que, nos cantos, as condições de contor

no impõem $\bar{N}_x = \bar{N}_y = 0$ e nada contribui para equilibrar o carregamento vertical, aparecendo portanto $N_{xy} \rightarrow \infty$, o que seria verdade se os cantos fossem completamente livres de esforços normais e se a casca não tivesse nenhuma resistência à flexão. Mas, devido à interação da casca com os apoios, existem alguns esforços normais nas bordas e cantos, donde se conclui que os esforços de cisalhamento são finitos e, além disso, nos cantos, as cargas são parcialmente equilibradas por esforços de flexão.

Sendo assim, resta conhecer a intensidade de $\bar{N}_{xy}$ nessas regiões de perturbação.

A solução oriunda da teoria de flexão, ver por exemplo Beles & Soare na ref. 9, indica que nessa região N_{xy} pode ser calculado pela expressão:

$$\bar{N}_{xy}(\text{cantos}) = (1+k+k^2) \bar{N}_{xy;0,9}$$

onde

$\bar{N}_{xy;0,9}$ é o esforço de cisalhamento no ponto de $x=0,9a$ e $y = 0,9b$ e $k = 0,006 \frac{f}{h}$.

Para os demais pontos do parabolóide, os esforços de membrana podem ser obtidos utilizando-se dos valores obtidos nas tabelas práticas confeccionadas por A. Parme (50) e que podem ser encontradas inseridas nessa referência.

Para ilustrar a distribuição dos esforços no parabolóide, são mostrados os diagramas da Fig. 8, correspondentes aos esforços num parabolóide de $a = b = 10,00$ m; $f_x = f_y = 1,00$ m; $h = 0,05$ m e submetido a um carregamento $q = 2 \text{ KN/m}^2$.

Quanto aos parabolóides com duas bordas livres, deve-se recorrer obrigatoriamente a soluções que considerem também os esforços de flexão.

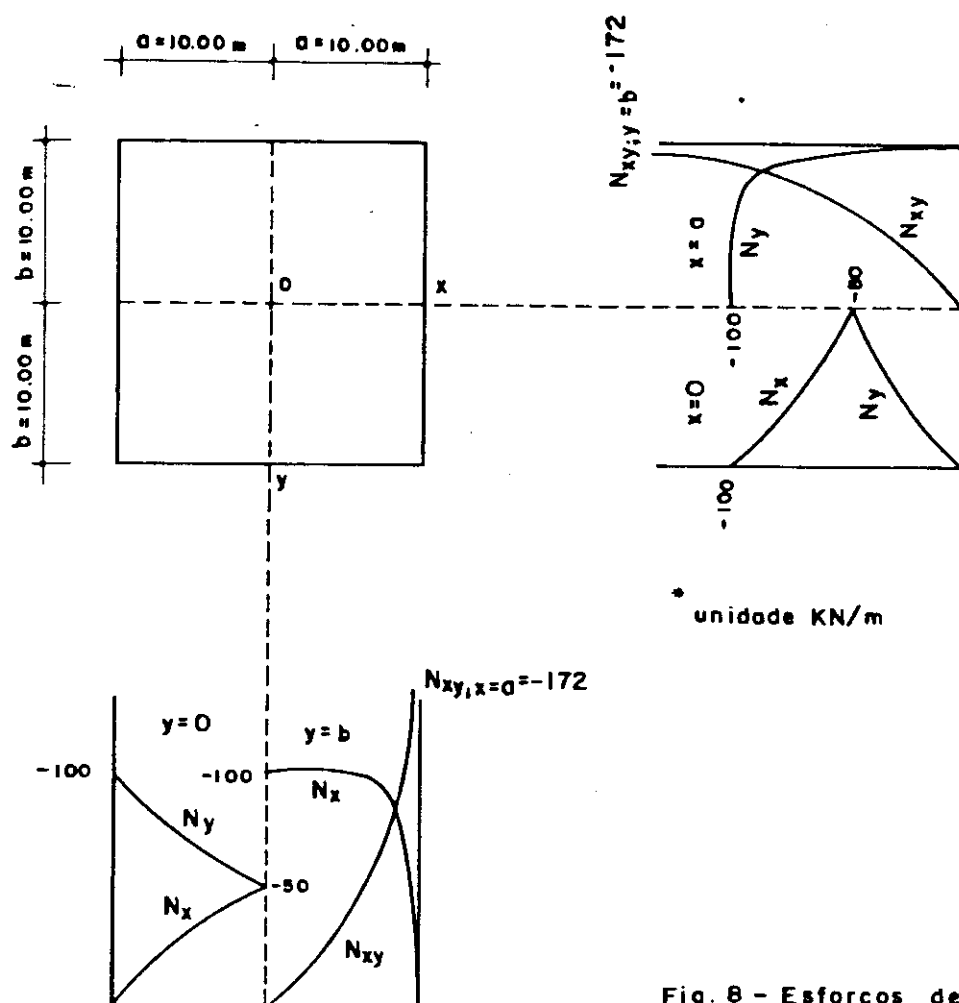


Fig. 8 - Esforços de membrana

5.3 - Teoria de Flexão

Como foi visto, nas regiões próximas às bordas e nos cantos dos parabolóides existem perturbações que a teoria de membrana não tem condições de medir, mas apenas de evidenciar sua existência, limitando-se também à resolução na casca apoiada nos quatro lados. É interessante, então, que seja introduzida uma teoria que considere os esforços de flexão e que abranja também outras situações de apoio.

A teoria de flexão será desenvolvida a partir das equações de Vlasov, por analogia dos parabolóides com as cascas abatidas, o que é razoavelmente válido desde que a relação entre as flechas e o lado menor do parabolóide seja inferior a 1/5, $f_x/2a ; f_y/2b < 1/5$. Assim, as equações 1 e 2, vistas no item 4.2, ficam:

$$1) \quad \nabla^4 F + Eh \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} = f_1(q)$$

$$2) \quad D \nabla^4 w - \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} = f_2(q)$$

onde,

E - módulo de deformação longitudinal

h - espessura da casca

$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ - módulo de rigidez à flexão

ν - coeficiente de Poisson

$\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$ - operador de Laplace

$\nabla_r^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial r_y^2} + \frac{\partial^2}{\partial r_x^2} \right)$

$f_1(q); f_2(q)$ - funções que dependem do carregamento.

No caso mais frequente de somente atuarem carregamentos verticais, as equações 1 e 2 reduzem-se a:

$$1) \quad \nabla^4 F + Eh \nabla_r^2 w = 0 \quad \text{e} \quad 2) \quad D \nabla^4 w - \nabla_r^2 F = q$$

ou eliminando sucessivamente F e w,

$$1) \quad D \nabla^4 \nabla^4 w + Eh \nabla_r^4 w = \nabla^4 q$$

ou

$$2) \quad D \nabla^4 \nabla_r^4 F + Eh \nabla_r^2 \nabla_r^2 F = Eh \nabla_r^2 q$$

e novamente o problema consiste em encontrar valores de F e w que satisfaçam as equações diferenciais e às condições de contorno.

Para a solução da equação em w foi escolhida u ma série do tipo de Levy para as placas, considerando que em $x = \pm a$, a casca encontra-se simplesmente apoiada em suportes (arcos, tímpanos, etc.) que apresentam rigidez so mente em seus planos, sendo flexíveis em planos normais a eles.

De acordo com esta situação de apoio, pode-se a dotar para a elástica uma função do tipo:

$$w = \sum_m A_m e^{ry} \cos \alpha_m z, \quad \text{com } \alpha_m = \frac{m\pi}{2a} \quad \text{e } m=1,3,5,\dots$$

com a equação $D\nabla^4 \nabla^4 w + Eh \nabla_r^2 \nabla_r^2 = \nabla^4 q$ tendo uma solução ge ral composta de uma solução particular (w_0) mais a solução da equação homogênea (w_1).

5.3.1 - Solução da equação homogênea

Sendo:

$$D\nabla^4 \nabla^4 w + Eh \nabla_r^2 \nabla_r^2 w = 0$$

ou

$$\nabla^4 \nabla^4 w + K^4 \nabla_r^2 \nabla_r^2 w = 0 \quad - \text{com } K^4 = \frac{Eh}{D}, \text{ razão entre os rigidezes axial e à flexão da casca.}$$

que pode ser escrita como:

$$1) (\nabla^4 w + iK^2 \nabla_r^2 w)(\nabla^4 w - iK^2 \nabla_r^2 w) = 0 \quad - \text{sendo } i \text{ a unidade imaginária}$$

Porém, desde que de 5.3

$$w = \sum_m A_m e^{ry} \cos \alpha_m x$$

e daí,

$$\nabla^4 w = \sum_m A_m (\alpha_m^4 - 2r^2 \alpha_m^2 + r^4) e^{ry} \cos \alpha_m x$$

e

$$\nabla_r^2 w = \sum_m A_m \left(\frac{r^2}{r_x} - \frac{\alpha_m^2}{r_y} \right) e^{ry} \cos \alpha_m x$$

Pode-se então desmembrar -1- em duas equações em -r-, que solucionadas, estabelecem w explicitamente. Assim:

$$1.a) \quad r^4 - r^2 \left(2\alpha_m^2 - i \frac{K^2}{r_x} \right) + \alpha_m^2 \left(\alpha_m^2 - i \frac{K^2}{r_y} \right) = 0$$

$$1.b) \quad r^4 - r^2 \left(2\alpha_m^2 - i \frac{K^2}{r_x} \right) - \alpha_m^2 \left(\alpha_m^2 - i \frac{K^2}{r_y} \right) = 0$$

Introduzindo nas equações desmembradas $t = r^2$, a resolução da primeira delas é a seguinte:

$$t^2 - t \left(2\alpha_m^2 - i \frac{K^2}{r_x} \right) + \alpha_m^2 \left(\alpha_m^2 - i \frac{K^2}{r_y} \right) = 0 \quad e$$

$$t = \frac{(2\alpha_m^2 - iK^2/r_x) \pm \sqrt{(4\alpha_m^4 - 4\alpha_m^2 iK^2/r_x - K^4/r_x^2) - 4(\alpha_m^4 - iK^2\alpha_m^2/r_y)}}{2}$$

ou

$$t = (\alpha_m^2 - iK^2/2r_x) \pm \sqrt{iK^2\alpha_m^2(1/r_y - 1/r_x) - K^4/r_x^2}$$

Fazendo:

$$a = \alpha_m^2 \quad c = -K^4/4r_x^2$$

$$b = K^2/2r_x \quad ; \quad d = K^2\alpha_m^2(1/r_y - 1/r_x)$$

e para $r_x > r_y$, tem-se:

$$t = (a - bi) \pm \sqrt{c + di} \quad , \quad e \quad como \quad r = \pm t$$

$$r = \pm \sqrt{a \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(\sqrt{c^2 + d^2} + c)^{1/2} + \left[-b \pm \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{c^2 + d^2} - c)^{1/2} \right] i \right]}$$

Desenvolvendo a expressão acima tem-se:

$$r = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \sqrt{\left[\sqrt{(a \pm e)^2 + (-b \pm f)^2} + (a \pm e)^{1/2} + i \left[\sqrt{(a \pm e)^2 + (-b \pm f)^2} + (a \pm e)^{1/2} \right] \right]} \right\}$$

com

$$e = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{c^2 + d^2} + c)^{1/2} ; \quad f = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{c^2 + d^2} - c)^{1/2}$$

e daí:

$$r_{1,2,3,4} = \pm (c_1 \pm i c_2)$$

com

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{(a+e)^2 + (-b+f)^2} \pm (a+e)} \\ c_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{(a+e)^2 + (-b+f)^2} \pm (a+e)} \end{aligned}$$

A solução de -1.b- é feita de forma análoga à -1.a-, obtendo-se outras quatro raízes.

$$r_{5,6,7,8} = \pm (c_3 \pm i c_4)$$

com

$$\begin{aligned} c_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{(a-e)^2 + (-b-f)^2} \pm (a-e)} \\ c_4 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{(a-e)^2 + (-b-f)^2} \pm (a-e)} \end{aligned}$$

Os valores de $-r$ são introduzidos na expressão de $-w$, resultando a solução da equação homogênea:

$$w_1 = e^{-C_1 y} (B_{11} \cos C_2 y + B_{12} \sin C_2 y) + e^{C_1 y} (B_{13} \cos C_2 y +$$

$$+ B_{14} \text{sen} C_2 y) + e^{-C_3 y} (B_{21} \text{cos} C_4 y + B_{22} \text{sen} C_4 y) + e^{C_3 y} (B_{23} \text{cos} C_4 y + \\ + B_{24} \text{sen} C_4 y) \cos \alpha_m x$$

ou

$$w_1 = (A_{11} \cosh C_1 y \cos C_2 y + A_{12} \sinh C_1 y \cos C_2 y + \\ + A_{13} \cosh C_1 y \text{sen} C_2 y + A_{14} \sinh C_1 y \text{sen} C_2 y + A_{21} \cosh C_3 y \cos C_4 y + \\ + A_{22} \sinh C_3 y \cos C_4 y + A_{23} \cosh C_3 y \text{sen} C_4 y + \\ + A_{24} \sinh C_3 y \text{sen} C_4 y) \cos \alpha_m x$$

Com w_1 conhecido, pode-se obter a a partir de -1-

$$F_1 = \frac{2D\sqrt{3}}{h} (A_{11} \sinh C_1 y \text{sen} C_2 y + A_{12} \cosh C_1 y \text{sen} C_2 y + \\ - A_{13} \sinh C_1 y \cos C_2 y - A_{14} \cosh C_1 y \cos C_2 y - A_{21} \sinh C_3 y \text{sen} C_4 y + \\ - A_{22} \cosh C_3 y \text{sen} C_4 y + A_{23} \sinh C_3 y \cos C_4 y + \\ + A_{24} \cosh C_3 y \cos C_4 y) \cos \alpha_m x$$

5.3.2 - Solução particular

Expressando o carregamento $-q-$ por:

$$q(x) = \sum_m q_m \cos \alpha_m x, \quad \text{com } q_m = \frac{4q}{m\pi} \text{sen} \frac{m\pi}{2} \quad \text{e } m = 1, 3, 5, \dots$$

e a solução particular de F , F_0 , por:

$$F_0 = \sum_m E_m \cos \alpha_m x$$

Substituindo em seguida em (2) resulta:

$$B_m = \frac{q_m}{r_y} \left[\frac{h^2 \alpha_m^6}{12(1-\nu^2)} + \frac{\alpha_m^2}{r_y^2} \right]^{-1}$$

e portanto,

$$F_o = \frac{1}{r_y} \left[\frac{h^2 \alpha_m^6}{12(1-\nu^2)} + \frac{\alpha_m^2}{r_y^2} \right]^{-1} \sum_m q_m \cos \alpha_m x$$

e

$$w_o = \frac{r_y \alpha_m^2}{Eh} \sum_m B_m \cos \alpha_m x$$

Verifica-se que o valor acima para F_o discorda da solução anterior obtida na teoria de membrana e isso o corre pelo fato de a solução particular estar influenciada pelas perturbações motivadas pelas flexões, agora consideradas. Se for feito nas equações de Vlasov $D = 0$, outra solução possível de ser adotada, estar-se-á considerando novamente o estado de membrana, cuja solução irá concordar com a anterior.

É interessante comentar que a parcela

$$\frac{h^2 \alpha_m^6}{12(1-\nu^2)},$$

não considerada por Bouma(12) e que aparece na expressão de B_m , é responsável, em boa parte, pela rápida convergência das séries que fornecem os esforços de membrana.

5.3.2 - Solução geral

As soluções gerais são:

$$w = w_o + w_1 \quad \text{para a elástica e}$$

$$F = F_o + F_1 \quad \text{para a função de tensão.}$$

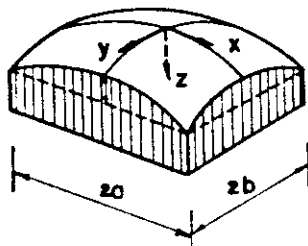
Para serem conhecidos os esforços e os deslocamentos é necessário determinar as incógnitas A_{ij} e B_{ij} através das condições de contorno, o que será feito.

As opções de apoio possíveis, de acordo com o procedimento aqui adotado para a integração das equações de Vlassov, são as de fazer o parabolóide simplesmente apoiado na direção x e simplesmente apoiado ou completamente livre ou apoiado e livre na direção y .

5.3.3 - Condições de contorno

a) Parabolóide simplesmente apoiado nas quatro bordas

Os elementos de apoio, supostos capazes de receberem esforços tão somente em seus planos, impõem que se faça nas bordas de $y = \pm b$



$$1) u = 0$$

$$2) w \cos \phi_0 + v \sin \phi_0 = 0$$

$$3) R_y \sin \phi_0 + N_y \cos \phi_0 = 0$$

$$4) M_y = 0$$

(ϕ_0 = inclinação, no apoio, da tangente à superfície do parabolóide).

que são as condições de contorno teoricamente corretas para os esforços e deslocamentos de acordo com as características assumidas para os apoios, nas bordas de $y = \pm b$ dos parabolóides elípticos e hiperbólicos. No entanto, por simplicidade, comumente utiliza-se as condições:

- | | |
|--------------|--------------|
| 1) $u = 0$ | 5) $v = 0$ |
| 2) $w = 0$ | 6) $w = 0$ |
| 3) $N_y = 0$ | 7) $N_x = 0$ |
| 4) $M_y = 0$ | 8) $M_x = 0$ |
- em $y = \pm b$ e em $x = \pm a$

que, em $x = \pm a$, são satisfeitas automaticamente pelas funções adotadas.

A utilização dessas condições simplificadas conduz evidentemente a erros que, verificados, mostraram-se reduzidos e foram desprezados. Observe-se que mesmo usando-se as condições corretas se estariam cometendo erros pelas condições impostas em $x = \pm a$.

O emprego dessas condições de contorno, simplificadas ou não, conduz a erros que são perceptíveis e localizados e que, por isso mesmo, podem ser minorados; por outro lado, evitam trabalho matemático mais complexo e laborioso, que ocorre se forem levadas em consideração condições de contorno baseadas na conexão, geralmente elástica, entre casca e apoio, que, por exemplo, para o sistema de apoio como o da Fig. 10, viga curva contínua, seriam na borda de $x = \pm a$.

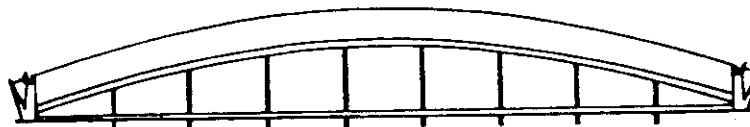
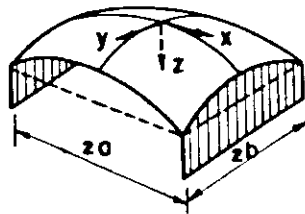


FIG. 10 — Viga curva, contínua, de apoio do parabolóide

- 1) $w_{\text{casca}} = w_{\text{apoio}}$ - a hipótese de fazer $w_{\text{casca}} = 0$, torna-se mais válida à medida que é aumentada a rigidez dos sistemas de apoio, que pode ser simbolizada pelo acréscimo do número de pilares ou pelo incremento da rigidez da viga de apoio.
- 2) $y_{\text{casca}} = H_{\text{viga}}$ - essa condição, de a deformação da casca na borda ser igual à rigidez axial da viga, implicará no aparecimento de esforços N_y e decréscimos nos esforços de cisalhamentos nessa borda.
- 3) $\frac{\partial w}{\partial x}_{\text{casca}} = \theta_{\text{apoio}}$
- 4) $U_{\text{casca}} = U_{\text{apoio}}$ - estas duas últimas condições são dependentes da rigidez lateral do sistema de apoio, que pode ser representado pela rigidez, em zx , do conjunto de pilares; à medida que cresce o número de pilares, aumenta-se a flexibilidade lateral, podendo cada vez mais, justificadamente, utilizar as condições simplificadas correspondentes.

Evidentemente, a adoção das condições acima conduzem, como foi dito antes, a trabalho numérico mais extenso, possibilitando, no entanto, que se obtenha resultados mais precisos para esforços e deslocamentos nas bordas, que irão se aproximar ou não das soluções simplificadas, de acordo com a relação entre a rigidez da casca e a do sistema de apoio e da real capacidade deste em absorver rotações, deslocamentos horizontais e em coibir os verticais.

- b) Parabolóide simplesmente apoiado em $x = \pm a$ e completamente livre em $y = \pm b$



Neste caso, as condições de contorno em $y = \pm b$ são:

- 1) $N_x = 0$
- 2) $M_y = 0$
- 3) $R_y = 0$
- 4) $N_{xy} = 0$

E em $x = \pm a$ são as mesmas anteriores.

Nesses casos vistos -a e b- as condições de apoio em lados opostos são idênticas, o que permite fazer as constantes $A_{12} = A_{13} = A_{22} = A_{23} = 0$ nas expressões de w e F , simplificando-as para:

$$w = \sum_m (A_{11} \cosh C_1 y \cos C_2 y + A_{14} \sinh C_1 y \sin C_2 y + A_{21} \cosh C_3 y \cos C_4 y + A_{24} \sinh C_3 y \sin C_4 y) \cos \alpha_m x + w_0$$

$$F = \frac{2D\sqrt{3}}{h} \sum_m (A_{11} \sinh C_1 y \sin C_2 y - A_{14} \cosh C_1 y \cos C_2 y + A_{21} \sinh C_3 y \sin C_4 y + A_{24} \cosh C_3 y \cos C_4 y) \cos \alpha_m x + F_0$$

Essas expressões não são válidas para o caso seguinte ou para o caso em que o parabolóide for simplesmente apoiado e livre, respectivamente em $y = +b$ e $y = -b$, ou vice-versa.

c) Parabolóide simplesmente apoiado em $x = \pm a$ e apresentando continuidade segundo y .

Seja o parabolóide -1- livre ou simplesmente apoiado em $+\alpha_1$ e conectado em $-\alpha_1$ ao -2-.

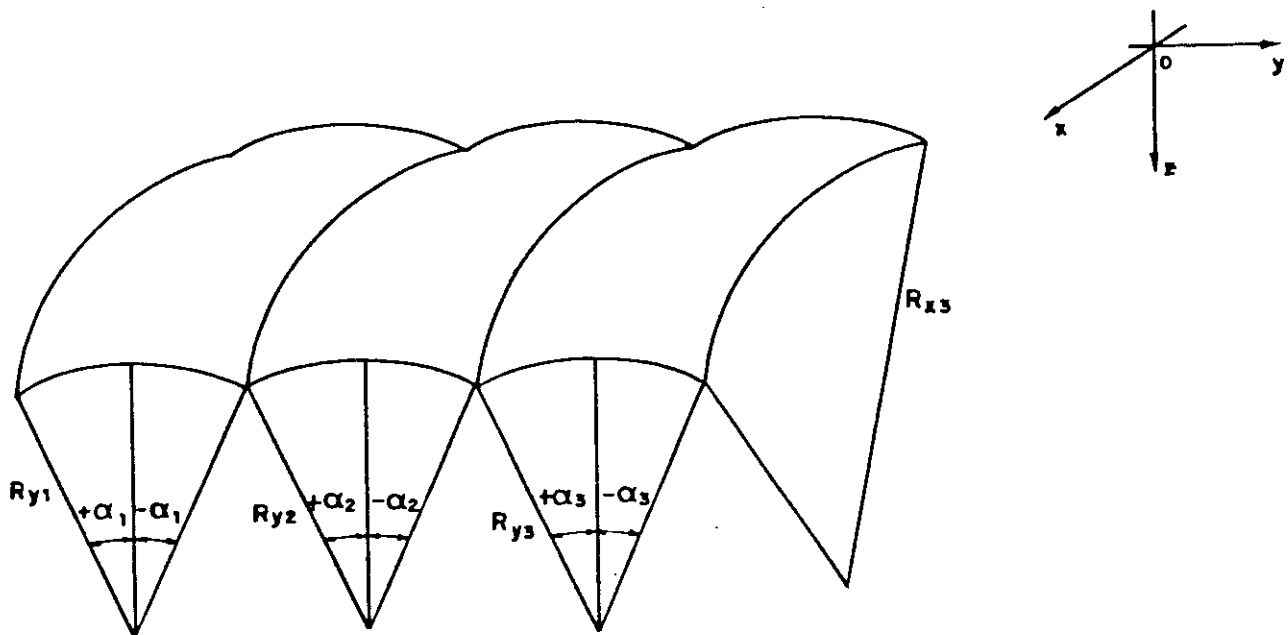


FIG. 12 - Parabolóides múltiplos

Neste caso, as condições em $+\alpha_1$ e $-\alpha_1$ são as de que na junção entre duas cascas haja continuidade nos deslocamentos e equilíbrio entre os esforços, ou seja:

$$1) v_{s1} = v_{s2}$$

$$2) u_1 = u_2$$

$$3) w_{s1} = w_{s2}$$

$$4) \frac{\partial w_1}{\partial y} = \frac{\partial w_2}{\partial y}$$

$$5) M_{y1} = M_{y2}$$

$$6) H_1 + H_2 = 0$$

$$7) V_1 + V_2 = 0$$

$$8) N_{xy1} = N_{xy2}$$

onde o índice 1 refere-se à casca da esquerda e o 2 à da direita e:

$$v_{s1} = v_1 \cos \alpha_1 - w_1 \sin \alpha_1$$

$$v_{s2} = v_2 \cos \alpha_2 + w_2 \sin \alpha_2$$

$$w_{s1} = v_1 \sin \alpha_1 + w_1 \cos \alpha_1$$

$$w_{s2} = v_2 \sin \alpha_2 + w_2 \cos \alpha_2$$

$$v_1 = N_{y1} \sin \alpha_1 + V_{y1} \cos \alpha_1$$

$$v_2 = N_{y2} \sin \alpha_2 - V_{y2} \cos \alpha_2$$

$$H_1 = N_{y1} \cos \alpha_1 - V_{y1} \sin \alpha_1$$

$$H_2 = N_{y2} \cos \alpha_2 + V_{y2} \sin \alpha_2$$

Introduzindo as condições respectivas para cada situação de apoio, são encontradas as constantes A_{ij} e B_{ij} e com elas w e F , resolvendo o problema.

5.3.4 - Os esforços internos e deslocamentos

Através das expressões de w e F , os esforços e deslocamentos são determinados por:

$$N_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} ; \quad N_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} ; \quad N_{xy} = - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) ; \quad M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

$$M_{xy} = D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$v_x = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) ; \quad v_y = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right)$$

$$v_x^* = -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right] ; \quad v_y^* = -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right]$$

$$w = w ; \quad u' = \int \left(\frac{1}{Eh} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{w}{r_y} \right) dx ; \quad v = \int \left(\frac{1}{Eh} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{v}{r_x} \right) dy$$

onde v_x^* e v_y^* são os cortantes transversais efetivos nas bordas de $x = \pm a$ e $y = \pm b$, respectivamente. O valor de v_x^* é obtido com o procedimento seguinte: nas bordas $x = \pm a$ da casca simplesmente apoiada no contorno, aparece o momento volvente M_{xy} (distribuído ao longo de y) originário das tensões τ_{xy} , que não pode ser absorvido por essa vinculação; no entanto como provoca efeitos localizados, pode-se substituí-lo e então equilibrá-lo, numa faixa de largura dS_y , por um conjugado de módulo M_{xy} e braço dS_y . Correspondentemente em uma seção infinitamente próxima da anterior, para o mesmo braço, a força será

$$\left(\tau_{xy} + \frac{M_{xy}}{S_y} dS_y \right)$$

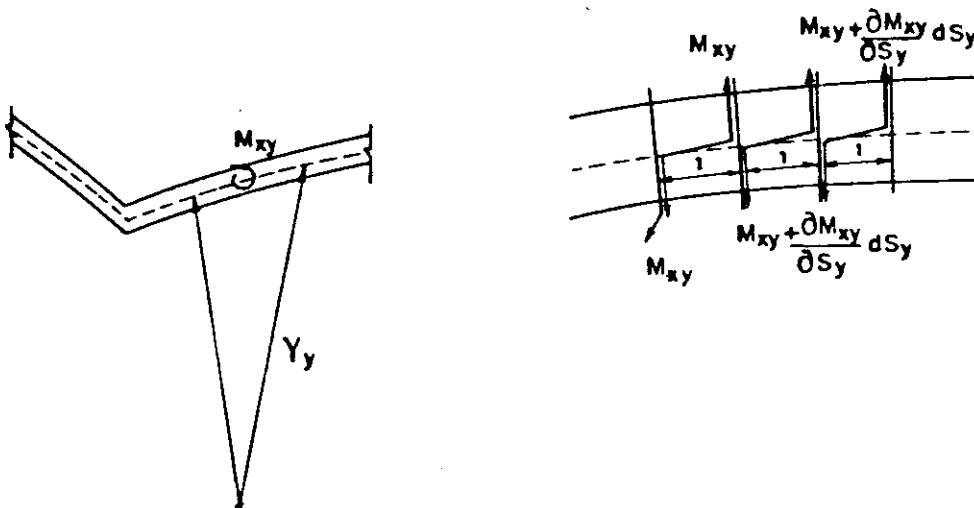


FIG. 14 - Esforço cortante efetivo nas bordas

Os esforços atuantes num mesmo ponto são adicionados aos pares, obtendo-se como resultado:

$$(M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial S_y}) - M_{xy} = \frac{\partial M_{xy}}{\partial S_y} dS_y$$

que na faixa de largura dS_y será um esforço distribuído de

$$\frac{\frac{M_{xy} dS_y}{\partial S_y}}{\frac{dS_y}{\partial S_y}} = \frac{\partial M_{xy}}{\partial S_y}$$

atuante da mesma forma que o cortante V_x , devendo a ele ser adicionada, resultando o esforço efetivo

$$V_x^* = V_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial S_y}$$

que para as cascas abatidas ($dS_y = dy$) pode ser colocado como:

$$V_x^* = V_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}$$

6. AUTOMATIZAÇÃO DO CÁLCULO

6.1 - Descrição do programa e utilização

O programa desenvolvido e descrito a seguir, visa a obtenção dos esforços e deslocamentos nos parabolóides e lípticos, de acordo com o processo de cálculo visto em fases anteriores.

Suas possibilidades de aplicação abrange os parabolóides com diferentes geometrias na direções principais ox e oy e inclusive daqueles providos de nervuras ou cuja seção transversal é em caixão ou, ainda, os que têm suas es

pessuras formadas em faixas de materiais diferentes, com a condição de que seja mantida a isotropia segundo as direções principais ox e oy (recomenda-se a leitura do item 5.5 do capítulo seguinte). As possibilidades de apoio são as vistas no item 5.4, ou seja, o parabolóide simplesmente apoiado em $x = \pm a$ e simplesmente apoiado ou completamente livre em $y = \pm b$.

Para a determinação dos esforços e deslocamentos, é necessário, antes de mais nada, o conhecimento das constantes $A_{11} - A_{14} - A_{21} - A_{22}$ (item 5.3.4), presentes nas expressões determinantes daqueles, em função das condições de contorno na borda $y = \pm b$. Assim, são utilizadas as subrotinas COEF e INDEP que geram, respectivamente, as matrizes dos coeficientes dos esforços interessados na borda de $y = \pm b$ e o vetor dos termos independentes, ambas em função de ser o parabolóide ou livre ou apoiado nessas bordas. Resolve-se o sistema com auxílio das subrotinas GRJIS (de inversão) e PROD (produto), encontrando-se as incógnitas procuradas, tendo-se agora condições de chegar ao objetivo último que é a obtenção dos esforços e deslocamentos, sendo que somente se preocupou com a determinação daqueles considerados importantes para o dimensionamento ou para verificações de equilíbrio vertical ou horizontal entre as solicitações no parabolóide.

O programa segue um processo iterativo cuja convergência acentua-se cada vez mais de acordo com o número de termos nas séries, sendo que, pelos exemplos feitos, a convergência se verificou e foi satisfeita quando se usou de cinco a sete termos.

Após esse cálculo são impressos os resultados finais dos esforços $N_x, N_y, N_{xy}, M_x, M_y, V_x^*, V_y^*, F_1$ (esforço principal de tração) e dos deslocamentos verticais w , em todos os pontos pretendidos.

A utilização do programa é simples e envolve somente a introdução de dados relativos à geometria do parabolóide nas características de rigidez axial e à flexão, carregamen

to de projeto, especificação das condições de apoio em $y = \pm b$, o número de termos nas séries e o número de pontos que se quer conhecer os esforços. Assim, são introduzidos, ao início do programa, os seguintes cartões:

```
READ (2,1)  AX, AY, RX, RY, HE
READ (2,2)  EH, D, CP
READ (2,3)  Q
READ (2,4)  LUC, LUA, NI, MM1, NN1
```

onde:

- AX - comprimento do parabolóide na direção OX - $AX = 2a$
- AY - comprimento do parabolóide na direção OY - $AY = 2b$
- RX - raio de curvatura no plano OZX
- RY - Raio de curvatura no plano OZY
- importante: de acordo com o item 5.3.1, deve-se ter obrigatoriamente $RX > RY$.
- HE - espessura - $HE = h$
- EH - rigidez axial - $EH = Eh$
- OBS.: para cascas que tenham nervuras, espessuras em faixas de diferentes materiais ou seção em caixão, ver o item 5.5 no cap. IV.
- D - rigidez à flexão do parabolóide $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$; é válida também, para o cálculo dessa constante, a mesma observação feita anteriormente.
- CP - coeficiente de Poisson ν
- Q - carregamento de projeto
- LUC, LUA - para o parabolóide simplesmente apoiado em $y = \pm b$, $LUC = LUA = 0$; para o parabolóide livre em $y = \pm b$, $LUC = LUA = 1$.
- NI - número de iterações desejadas; número de termos M nas séries
- MM1 - número de pontos que se quer conhecer os esforços na direção OX.
- NN1 - número de pontos que se quer conhecer os esforços na direção OY.

Em anexo, encontra-se a listagem do programa e um exemplo de aplicação.

6.2 - Comparação dos resultados obtidos de acordo com a teoria de flexão com os da teoria de membrana e os obtidos por Dikovich

Com a finalidade de comprovar a eficiência do processo utilizado neste trabalho para o desenvolvimento da teoria de flexão e de comparar os resultados desta com os de membrana, serão mostrados a seguir os diagramas dos esforços e deslocamentos para o parabolóide cujos dados são os abaixo:

$$2a = 2b = 15,00m$$

$$r_x = r_y = 28,13m$$

$$f_x = f_y = 1,00m$$

$$h = 0,05m$$

$$q = 1,75 \text{ KN/m}^2$$

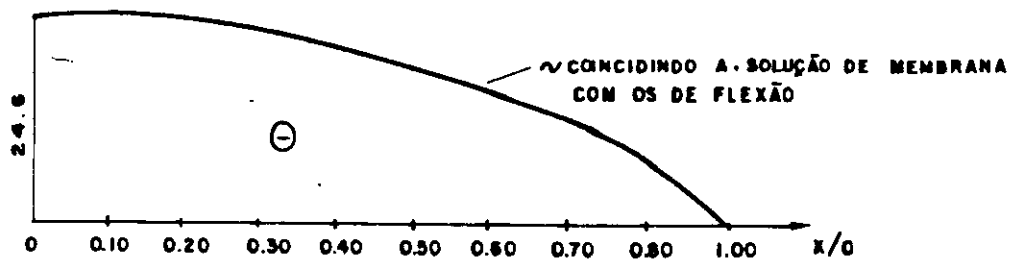
$$E = 277 \times 10^5 \text{ KN/m}^2$$

Os esforços de membrana foram calculados pela teoria de Parme, exposta juntamente com as tabelas utilizadas, na referência 48.

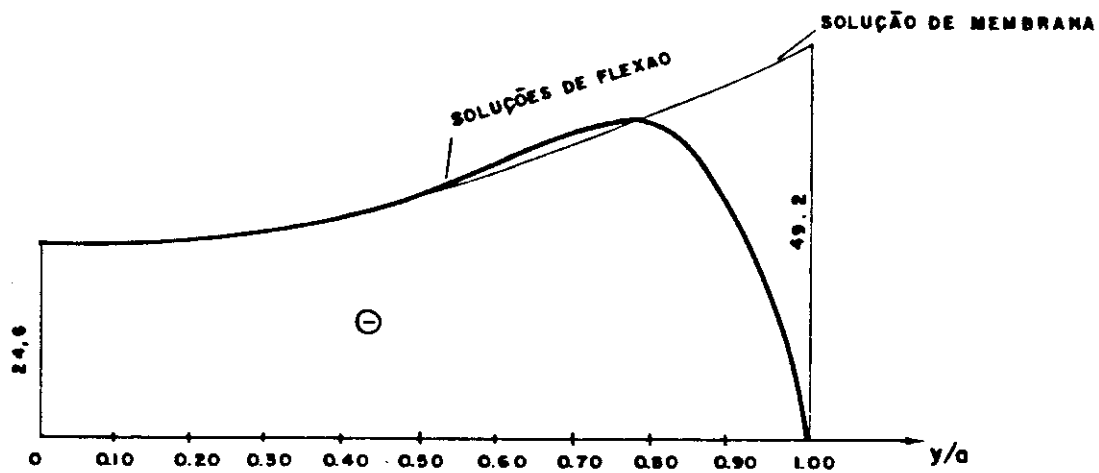
Os esforços de flexão foram obtidos com auxílio do programa em anexo, adotando-se sete termos para as séries. Como elemento também comparativo, calcularam-se os esforços e deslocamentos segundo a teoria de flexão utilizando-se das tabelas de Dikovich encontráveis em Beles-Soare (9).

6.2.1 - Esforços de Membrana

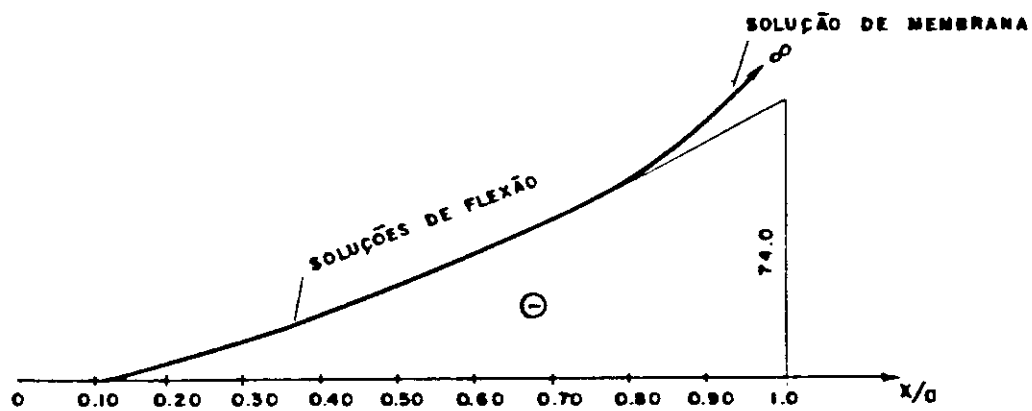
a) Esforço N_x (KN/m) ao longo do eixo x em $y = 0$



b) Esforço N_x (KN/m) ao longo do eixo y em $x = 0$



c) Esforço N_{xy} ao longo do eixo y, na borda de $x = a$



Como pôde ser notado, as soluções de flexão praticamente convergem para os mesmos resultados, que, comparados com os da teoria de membrana, mostram-se discrepantes nas bordas, para os valores de N_x e N_y , pelos motivos explicitados a seguir.

Na teoria de membrana desenvolvida por Parme, sempre deve ser obedecida em qualquer ponto a condição

$$\frac{\partial^2 F}{r_y \partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{r_x \partial y^2} = -q \quad \text{ou} \quad \frac{N_y}{r_y} + \frac{N_x}{r_x} = -q$$

e como na borda $x = a$ (por exemplo), pelas características dos apoios, fez-se $N_x = 0$, segue-se que para $q = \text{cte}$ (como adotado na referência (48)) deve-se ter $N_y = q r_y$, o que discorda dos resultados das teorias de flexão. Caso fosse adotada para q uma expressão em série do tipo

$$q = q_m \cos \alpha x \quad (\alpha = \frac{m\pi}{a} ; m = 1, 3, 5, \dots),$$

ter-se-ia em $x = a$, $N_y = 0$, concordando com as soluções de flexão.

Quanto ao esforço N_{xy} nos cantos, as diferenças surgem pela singularidade, explicitada no item 5.2.3, do estado de solicitações de membrana. Se N_{xy} for calculado nos cantos por

$$N_{xy} = (1+k+k^2) N_{xy;0,9} \quad , \quad \text{com } k = 0,06 f/f,$$

ter-se-ia

$$N_{xy} = (1+0,12+0,12^2) 74,5 = 84,5 \text{ KN/m}$$

valor finito e mais próximo daquele da teoria de flexão.

É interessante também, a esta altura, mostrar a combinação dos esforços de membrana, que estabelecerá os esforços principais de tração e onde se localizam com

maior intensidade. Esses esforços e suas direções, em relação ao eixo ox, são calculados pelas expressões abaixo, desprezando-se a influência dos momentos fletores que, como se verá no item seguinte, são de baixa intensidade.

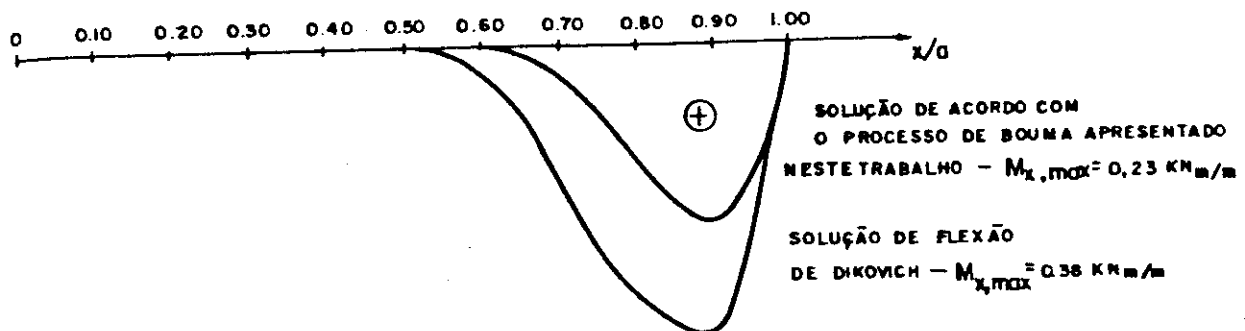
$$F_1 = \frac{N_x + N_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{N_x - N_y}{2}\right)^2 + \frac{N_{xy}^2}{4}}$$

$$\arctg 2\alpha = \frac{2N_{xy}}{N_x - N_y}$$

-11,6 135°	-8,9 20°25'	-5,3 22°14'	+0,4 119°15'	+8,1 122°17'	+23,5 135°	5
—	-6,5 135°	-2,5 128°36'	+3,4 124°53'	+13,8 126°29'	+31,0 135°	6
—	—	+1,8 135°	+9,1 130°20'	+22,10 130°18'	+41,0 135°	7
—	—	—	+18,7 135°	+34,2 133°15'	+53,7 135°	8
—	—	—	—	+51,0 135°	+67,2 135°	9
—	—	—	—	—	+74,0 135°	10
5	6	7	8	9	10	

— esforços e direções principais de tração

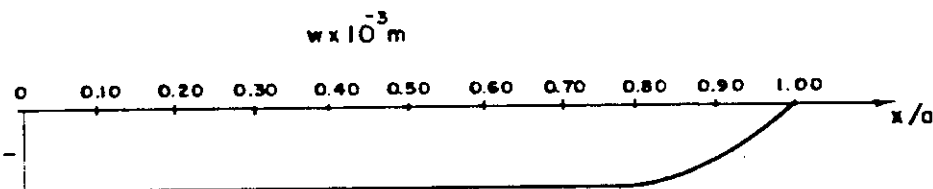
d) Momento fletor M_x (KN·m/m) ao longo do eixo x em $y = 0$



Os momentos fletores são reduzidos e a diferença absoluta entre as soluções de flexão não têm importância significativa em termos de projeto, por serem os módulos baixos; note-se entretanto, que a solução pela teoria a apresentada neste trabalho concorda com os valores obtidos de acordo com as expressões estabelecidas por Doga noff (21).

e) Deslocamentos verticais

Os deslocamentos w mostram-se compatíveis nas duas soluções; sua variação e valores são vistos abaixo ao longo do eixo x em $y = 0$.



7. CONSIDERAÇÕES DE CÁLCULO

De maneira geral, nos vários procedimentos existentes para a resolução do sistema de equações diferenciais (equações 1 e 2, item 4.2), que representa o equilíbrio e a compatibilidade das deformações das cascas abatidas, verificou-se que, na maior parte dos casos, a solução foi possível pela adoção de hipóteses simplificadoras nas condições de contorno. Tal fato, se por um lado simplifica a resolução matemática do sistema, redundando em condições de apoio que, se não irreais, pelo menos são de difícil realização na prática.

As simplificações feitas normalmente são as de anular no contorno as incógnitas principais ou suas derivadas, evidentemente facilitando a resolução das equações 1 e 2, e permitindo que as incógnitas sejam representadas por funções que satisfaçam plenamente as condições impostas; por exemplo, neste trabalho, para integração das citadas equações diferenciais, admitiu-se o parabolóide como simplesmente apoiado em pelo menos duas bordas opostas em elementos rígidos em seus planos e flexíveis em planos normais a estes, permitindo fazer no contorno definido por $y = \pm b - w = M_y = N_x = N_y = 0$ -, condições que ficam perfeitamente caracterizadas quando as incógnitas principais w e F são representadas por séries com as adotadas, ou por algum outro processo conveniente.

Com as simplificações, erros são cometidos, porém perceptíveis e localizados em pequenas faixas e que, por isso mesmo, podem ser minorados; evita-se com isso também trabalho matemático mais complexo e laborioso, que o corre ao se considerar as reais condições de apoio, que conduzirão a resultados mais precisos, que se aproximam ou não da solução simplificada, de acordo com a relação entre a rigidez da casca e do apoio. Soluções mais refinadas que a adotada neste trabalho, podem ser obtidas através da utilização de diferenças finitas bem elaboradas e do método dos

elementos finitos, considerando a real interação casca-apoio.

No caso dos parabolóides e das calotas esféricas, talvez as soluções aproximadas de flexão ou de membrana desenvolvidas, com algumas correções, satisfaçam as necessidades do projetista, e é o que têm mostrado os resultados de obras realizadas e ensaios de modelos; no entanto, soluções que forneçam resultados mais próximos dos reais são desejáveis sempre que existirem situações incomuns de apoio, dimensões, curvatura da superfície e de carregamento.

Pelos resultados encontrados de acordo com a teoria de flexão, pode-se notar as regiões críticas em termos de solicitações e que irão exigir maiores cuidados no dimensionamento e distribuição das armaduras; as modificações a serem feitas irão redundar em minoração nos esforços principais de tração nos cantos, e acréscimos nos de flexão nas bordas e proximidades, inclusive com aparecimento de momentos negativos. Para serem efetuadas tais correções dispõe-se de dados obtidos por Abu-Sitta(2), que estudou teoricamente e experimentalmente o problema da interação casca-apoio, através de diferenças finitas e ensaios em modelos de Perspex. Esse trabalho, no entanto, careceu de estudo em peças de maiores dimensões e de concreto, para serem obtidos resultados mais confiáveis.

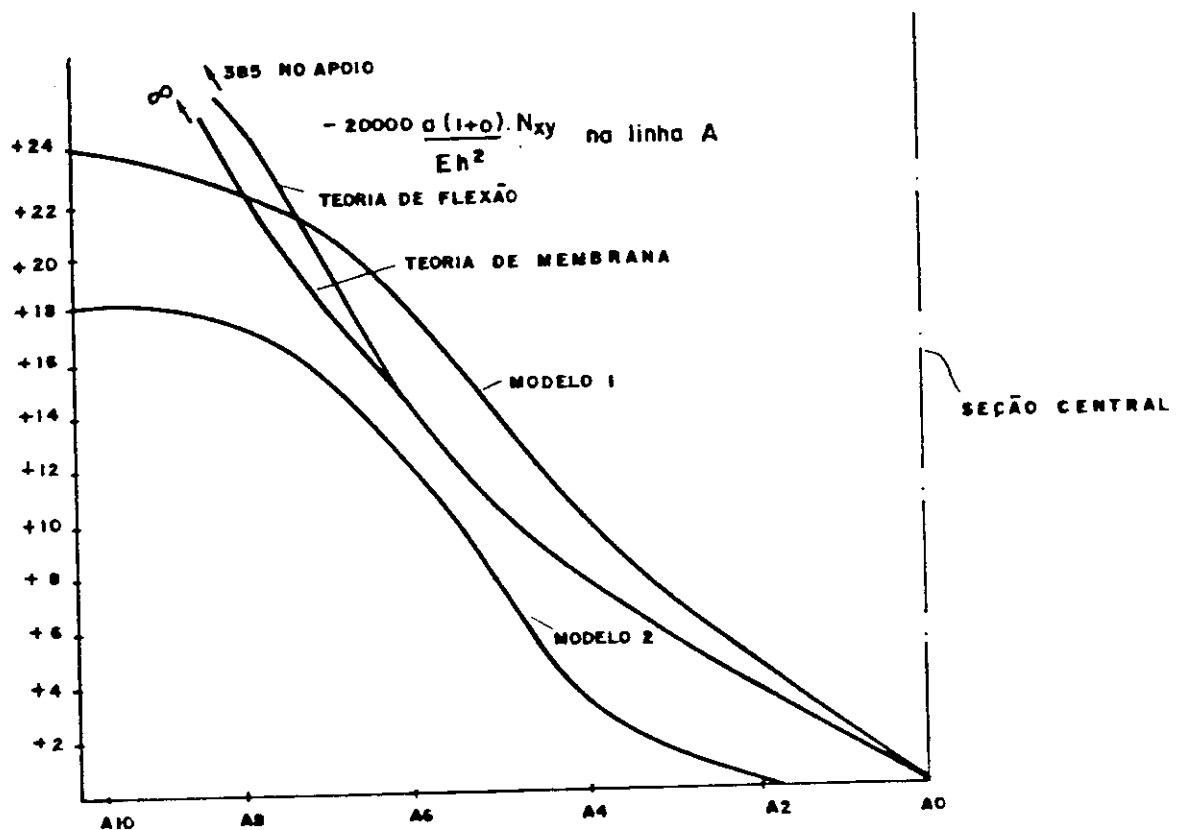
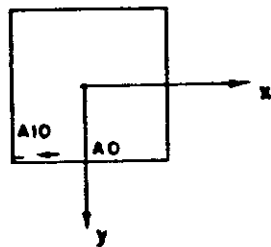
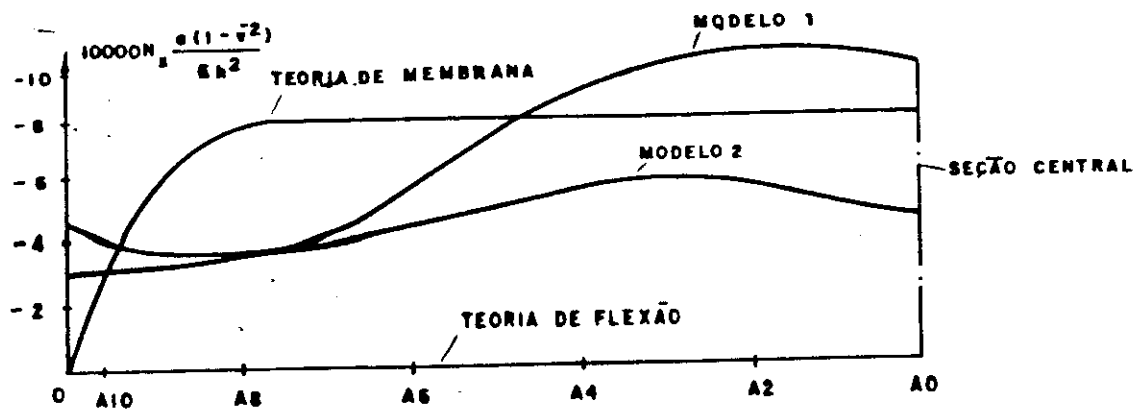
Outro trabalho interessante sobre o assunto, foi o feito por V. Gioncu (9), que também utilizou diferenças finitas e modelos para o estudo da citada conexão, estabelecendo, também, correções nos esforços de borda quando ocorrem deslocamentos laterais nos pilares de canto.

Na referência (37) são descritos os resultados de experimentos realizados no Instituto de Pesquisa de Concreto e Concreto Armado (Moscou), com o objetivo de conhecer as perturbações de borda nas cascas de dupla curvatura e as diferenças que surgem com o uso das teorias de membrana e de flexão considerando os apoios rígidos. Desse trabalho, pôde-se concluir que os resultados da teoria da

flexão, principalmente quando é considerada a interação com o apoio, são bons, exceto nos cantos, onde os valores são majorados em relação aos reais de até 30 a 40%, quando os apoios são vigas curvas de altura variável (tímpanos).

A função dos apoios dispostos no contorno é a de manter a forma da casca, prevenindo deformações excessivas nessas regiões, reduzindo com isso os esforços de flexão e aproximando o comportamento da casca do estado de tensões admitido na teoria de membrana; os apoios também aliviam a casca de tensões diretas de tração, absorvendo-as e distribuindo uniformemente os esforços de compressão através da superfície média da casca. De acordo com a relação entre as rigidezes da casca e dos apoios e das vinculações destes com os pilares, ter-se-ão maiores variações entre os resultados teóricos e o estado real de tensões.

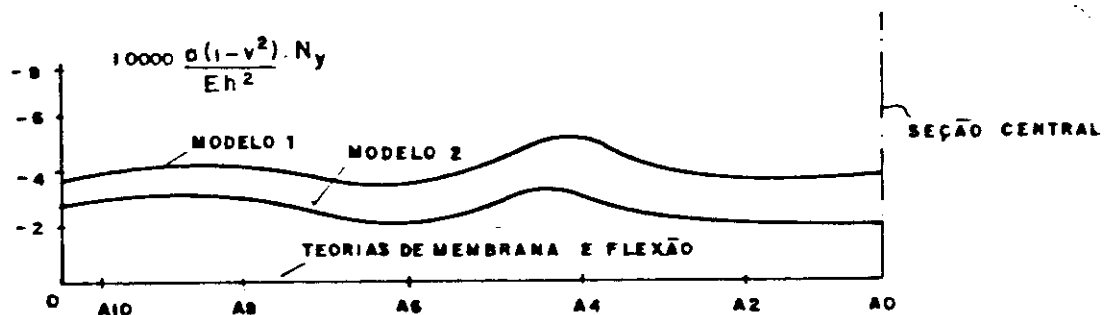
Para se ter boa idéia da influência da rigidez real do apoio, analisemos o esforço N_x nas bordas $y = \pm b$; se for o caso de bordas livres surgirão, no contorno, consideráveis esforços de tração e, se existirem apoios rígidos, esses esforços serão nulos; com a presença de apoios de rigidez intermediária aos limites extremos, existirão, atuando nas bordas, esforços normais de compressão que irão minimizar as trações principais, redução que geralmente não é considerada na teoria de flexão. Os resultados vistos a seguir foram extraídos do trabalho, anteriormente citado, de Abu-Sitta, que os obteve através de ensaios em modelos de Perspex de dimensões em planta de 80 x 80 cm, $r_x = r_y = 13$ cm, apoiadas em arcos bi-rotulados de dimensões 1,25 x 2,5 cm no modelo 1 e 1,25 x 3,875 cm no modelo 2.



Do mesmo trabalho pode-se extrair outras observações, como por exemplo, as modificações na maneira pela qual os carregamentos oriundos da casca são transmitidos a travêz dos esforços N_{xy} , N_x e V_x^* (em $x = \pm a$). O quadro seguinte mostra a contribuição feita em porcentagem da componente vertical de cada um dos esforços, e os gráficos, as diferenças entre os resultados teóricos e experimentais para N_{xy} .

MÉTODO USADO	N'_{xy}	N'_x	N'_y
TEORIA DE MEMBRANA	100	0	0
TEORIA DE FLEXÃO (CASCA ROTULADA NO APOIO)	90	10	0
EXPERIMENTO EM MODELO DE PERSPEX (MODELO 1)	74	DESPREZÍVEL	35
EXPERIMENTO EM MODELO DE PERSPEX (MODELO 2)	53	DESPREZÍVEL	48

* N'_{xy} e N'_x são as componentes verticais de N_{xy} e N_x , respec.



Com esses resultados, notam-se claramente as diferenças entre os resultados teóricos e os experimentais e, conseqüentemente, o efeito ao se tomarem condições irreais de contorno.

Comparando os resultados da teoria desenvolvida para o cálculo e os dos experimentos de Abu-Sitta, pode-se chegar às seguintes conclusões:

- a) na seção central do parabolóide os esforços de membrana representam suficientemente bem o estado de tensões real, não havendo necessidade de correções;
- b) nas bordas é necessário fazer correções nos momentos fletores, nos esforços normais N_x e N_y , e nos cantos deve-se corrigir N_{xy} .

As alterações nos esforços de membrana irão, de maneira geral, minorar os esforços principais de tração, mas não ao ponto do projetista, para situações normais de apoio, dimensões e carregamento, estar dimensionando exageradamente a peça; quanto aos esforços de flexão, é intuitivo que deveriam existir nas bordas, pelo monolitismo da conexão casca-suporte; felizmente a amplitude dos momentos é pequena e sua faixa de ação é restrita a pequenos trechos.

Visto que existem modificações a serem feitas nas bordas, é interessante mostrá-las numericamente visando do fornecer ao projetista dados práticos que permitam corrigir com razoável justeza os esforços nos locais principais de perturbações. As recomendações de cunho prático foram extraídas de estudos teóricos realizados por Doga-roff (21) e também experimentais, por Abu-Sitta (2).

Os esforços corrigidos, mostrados a seguir, são aplicáveis a parabolóides e calotas esféricas sobre base quadrada apoiadas em arcos cujas alturas se situam entre 2,5 e 7,5% do vão total. As regiões consideradas como críticas são:

- a) a faixa de largura 0,2a adjacente aos apoios:

- b) a seção triangular nos cantos, de lados com comprimentos nos apoios igual a $0,6a$.

Admitindo que os esforços foram calculados de a cordo com a teoria de membrana ou com a teoria de flexão, pode-se assumir nas bordas:

- a) N_x igual ao esforço de membrana em $x = 0$; $y = 0,8a$:
b) N_y igual ao esforço de membrana no centro da casca;
c) que N_{xy} é reduzido segundo a expressão:

$$N_{xy} = 20000 \frac{a(1+\nu)}{Eh^2} N_{xy} \quad (\text{unidades SI})$$

N_{xy} → valor calculado na borda com a teoria de flexão.

Quanto aos momentos fletores, existem indicações em Doganoff mostrando que esses esforços não são significativos, bastando, na maioria dos casos, dispor nas bordas armaduras construtivas. Os valores obtidos referem-se a duas condições extremas: casca rotulada ou engastada, mas que servem para se ter idéia dos valores dos momentos atuantes. que, para as vinculações que ocorrem normalmente na prática, irão se situar entre esses valores externos.

- a) Casca engastada no apoio

$$M_{\max} = 0,093 Rhq [1 - e^{-p(y+a)} \cosh p(y+a)]$$

que ocorre à distância da borda de

$$b = \frac{\pi}{4p}$$

- b) Casca engastada no apoio

$$M_{\max} = 0,060 Rhq [1 - e^{-p(y+a)} \cosh p(y+a) + \sinh p(y+a)]$$

$$x_{\max} = -0,2885 R h q \left[1 - e^{-p(y+a)} \cosh p(y+a) + \sinh p(y+a) \right]$$

que ocorre na borda, sendo

$$p = \sqrt[4]{\frac{12}{R^2 h^2}}$$

8. ANÁLISE DA VARIAÇÃO DOS ESFORÇOS NOS PARABOLÓIDES COM A VARIAÇÃO DE CERTOS PARÂMETROS

O objetivo desta parte do trabalho é fornecer dados qualitativos acerca do comportamento dos parabolóides com a variação dos parâmetros seguintes:

- a) a curvatura;
- b) relação entre os lados - a/b -;
- c) espessura h .

Pretende-se, com os resultados obtidos, estabelecer critérios auxiliares a nível de anteprojeto para fixação de dimensões e relações entre elas, que conduzam a situações favoráveis em termos de esforços e flechas.

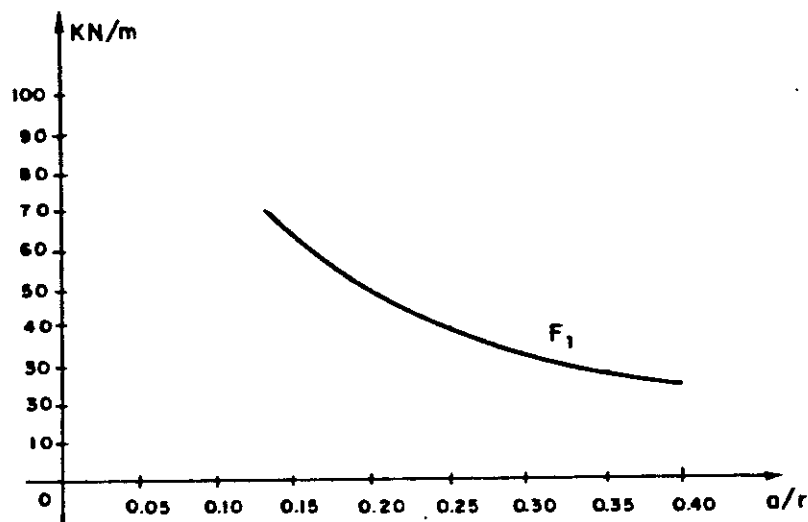
Os parabolóides analisados foram supostos simplesmente apoiados e submetidos a carregamentos de peso próprio acrescido de sobrecargas de $0,50 \text{ KN/m}^2$ (normal para coberturas). O concreto foi admitido com módulo de deformação longitudinal $E = 277 \times 10^5 \text{ KN/m}^2$ e com coeficiente de Poisson $\nu = 0,20$.

a) Efeito da variação da curvatura

Fazendo $a = b$, $q = \text{cte.}$ e distribuído uniformemente sobre a superfície e com $r_x = r_y = r$, percebe-se que

o decréscimo da curvatura, simbolizado pela relação a/r , é acompanhado de aumentos sensíveis nos esforços de membrana, comportamento já aguardado, pois, quanto mais abatida a casca, maiores deverão ser os esforços normais (responsáveis pelo equilíbrio das ações externas em grande parte do parabolóide), que se aproximam cada vez mais da horizontal.

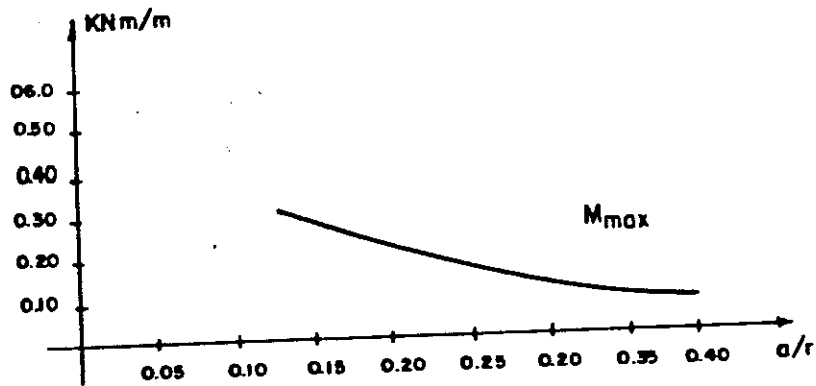
A variação dos esforços de membrana com a curvatura é representada, no gráfico abaixo, pela variação do esforço principal de tração F_1 com a relação a/r .



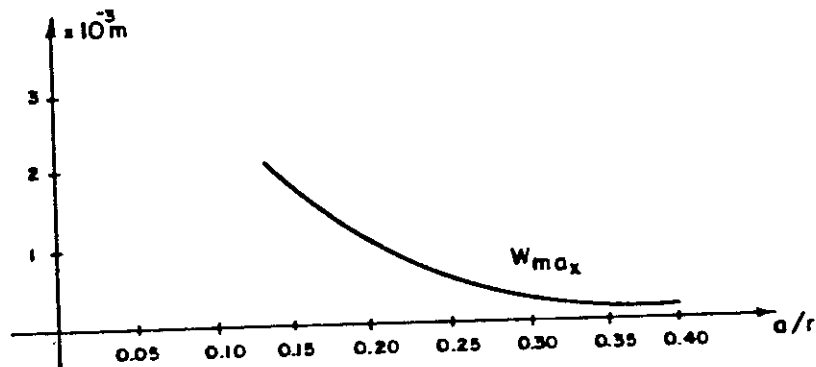
—variação do esforço principal de tração com a curvatura

Os momentos fletores M e o deslocamento vertical também aumentam com o decréscimo da curvatura, tendendo, no limite, aos momentos e deslocamentos de uma placa.

Para mostrar a influência da existência da curvatura, note-se o exemplo de uma placa com as mesmas dimensões em planta e condições de apoio, submetida ao mesmo carregamento tem-se que, neste caso, o momento máximo e a flecha da placa valem, respectivamente 7,8 KN·m/m e 0,236m.



— variação do momento fletor máximo com a curvatura



— variação da flecha com a curvatura

Complementando o panorama nostrado nos gráficos, é interessante lembrar que a curvatura máxima dos parabolo

lóides está implicitamente ligada à relação flecha/menor lado $< 1/5$, valor citado na literatura como limite teórico para que o cálculo dessas estruturas, de acordo com as hipóteses assumidas de abatimento da superfície, conduza a resultados satisfatórios. Entretanto, pouco se comenta sobre valores mínimos para a curvatura, que tende no limite a zero; procurou-se, então, uma forma para limitar a curvatura num mínimo e o critério adotado foi o controle dos deslocamentos verticais que crescem proporcionalmente com os raios de curvatura.

Com o incremento desses deslocamentos, contrariar-se a hipótese de pequenas deformações admitidas ao início do cálculo e a linearidade elástica já não ocorre, invalidando a teoria desenvolvida, o que no caso é um indicador de já não ser essa a estrutura ideal para a cobertura, pois não se está tirando proveito da curvatura, necessitando-se, cada vez mais, de maiores espessuras para assegurar rigidez transversal. Verifica-se, também, que à medida que a curvatura decresce, a casca também estará mais sujeita à perda de estabilidade, conforme pode ser visualizado pela expressão $q_{cr} = CE\left(\frac{h}{r}\right)^2$, que estabelece a carga crítica de flambagem para as cascas de dupla curvatura.

Para se tentar estabelecer um intervalo de variação da relação a/r , a fim de que o parabolóide seja uma estrutura eficiente e possa ser calculada como casca abatida, fizeram-se vários exemplos, nos quais para vãos iguais variou-se a/r , que permitiram concluir que aquela será estável e pouco deformável (com pequenas espessuras, eventualmente enrijecidas por nervuras), desde que a/r assuma um mínimo em torno de $1/5$ a $1/7,5$.

Resumindo, para que o parabolóide represente uma opção construtiva esbelta e econômica para coberturas abatidas, é necessário que sua curvatura não seja demasiadamente reduzida, enquadrando-se a relação a/r no intervalo $1/7,5$; $1/5 < a/r < 1/2,5$ ou da mesma forma $1/15$; $1/10 < f/r < 1/5$, que em Beles-Soare(9) é fixado como $1/15 < f/R < 1/3,5$.

Tem-se também que o decréscimo da curvatura é a acompanhado de maiores esforços de flexão e de membrana e, se por um lado essa proporcionalidade tem uma lógica, por outro representa um paradoxo, pois como para o equilíbrio das ações verticais (item 4.1) existe a contribuição da variação das cortantes transversais, seria portanto de se esperar que a proporção que a curvatura diminui um comportamento típico da laje com menores esforços de membrana, o qual não ocorre por as condições de contorno adotadas serem de casca e não de laje. A procura de limites para fixação de quando se considerar condições de contorno de casca ou placa não é simples, o que fez optar pelo critério anterior, de controle de deslocamentos verticais e, talvez, sua definição implique em estudo experimental complementando a teoria mais refinada.

Os resultados apresentados em gráficos foram relativos a parabolóides iguais segundo as direções x e y ; no caso de variar a relação r_x/r_y , não ocorrem preocupações maiores em termos de projeto, pois os esforços e deslocamentos máximos se darão com essa relação igual à unidade. Como informação de ordem geral, a relação $N_{x,max}/N_{y,max}$ cresce prpporcionalmente a r_x/r_y , o inverso acontecendo com $N_{x,max}/N_{y,max}$.

b) Efeito da variação da relação entre os lados

A variação do parâmetro a/b não provoca alterações sensíveis nos valores máximos dos esforços, visto que ocorrem a partir da relação $a/b = 1$ tão somente modificações na forma como são equilibradas as ações externas. Para se chegar a essas conclusões, foram analisadas duas séries de exemplos com as seguintes características:

- 1) variou-se a/b com a relação entre as curvaturas permanecendo constante;
- 2) variou-se a/b com a relação entre as curvaturas também variando.

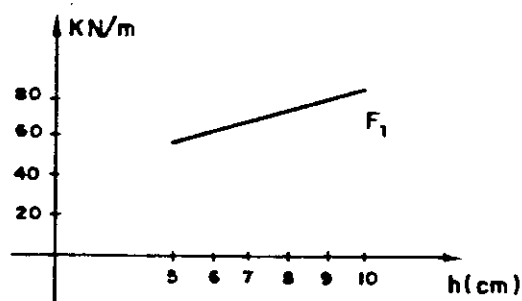
Verificou-se no caso 1 que à medida que a relação a/b aumenta, os esforços de membrana desenvolvem-se preponderantemente segundo a direção x com os momentos fletores sendo equivalentes segundo x e y .

No segundo caso, para $a/b > 1$ e $r_x/r_y > 1$, insinua-se um comportamento misto para o parabolóide de casca, com maiores esforços de membrana, na direção do maior lado e de placa, na de menor lado. Para $a/b < 1$ e $r_x/r_y > 1$, o efeito de membrana segundo x é ainda mais acentuado, com os momentos fletores maiores na direção y , à semelhança das cascas cilíndricas longas.

Pode-se dizer, concluindo, que os parabolóides sobre planta retangular apresentam um comportamento geral semelhante àqueles sobre planta quadrada, diferindo apenas na forma de distribuição dos esforços.

c) Efeito da variação da espessura

Analisando o caso mais comum de coberturas onde a carga permanente é constituída de cargas de peso próprio e de sobrecargas da mesma ordem de grandeza, a variação da espessura irá se traduzir em acréscimos nos esforços de membrana, o que pode ser notado pela expressão $N_x + N_y = qR$ (5.2.3), sendo q crescente com h , e pelo gráfico $F_1 \times h$, a baixo.



- variação do esforço principal de tração com a variação da espessura

Os deslocamentos w são proporcionais a $1/h$ e os momentos fletores proporcionais a h , como pode ser visto pelos gráficos seguintes e através da expressão simplificada.

$$w = \frac{q r_x^2}{E h} (A \cos \beta x + B \sin \beta x) + \frac{q r_x^2}{E h},$$

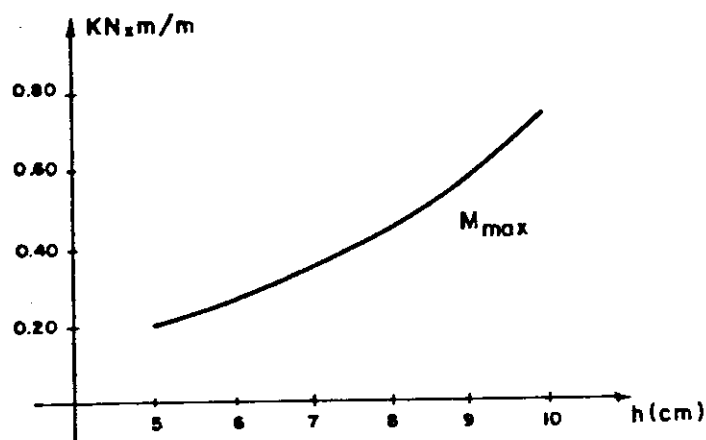
resultante da dupla integração da equação (4.2), desde que se despreze a curvatura segundo y e que

$$4\beta^4 = \frac{12(1-\nu^2)}{h^2 r_x^2}$$

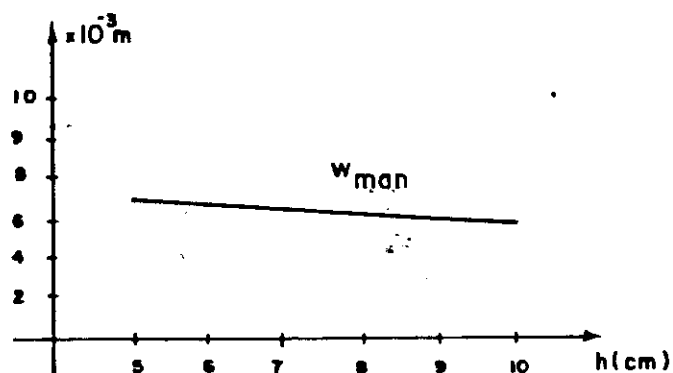
Como:

$$M_x = -D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \therefore \quad M_x = h^3 \frac{1}{f} \frac{1}{h} \approx h$$

confirmando a proporcionalidade referida.



—variação do momento fletor máximo com a variação da espessura



-variação da flecha com a variação da espessura

No caso de existirem sobrecargas elevadas em relação ao carregamento de peso próprio, os esforços de membrana permanecem praticamente constantes e os deslocamentos e momentos variam de modo semelhante ao mostrado nos gráficos anteriores.

9. VERIFICAÇÃO À FLAMBAGEM

Sendo os parabolóides estruturas essencialmente comprimidas, é interessante verificar sua capacidade resistente à flambagem e os fatores que nela intervêm e que servirão como elementos de ante-projeto.

À exceção das cascas esféricas e cilíndricas, o conhecimento que se tem sobre o problema de estabilidade em cascas de concreto armado é muito parco, pois grande parte dos dados disponíveis sobre o assunto foram obtidos através de experiências em modelos de cascas metálicas, existindo, mesmo nesses casos, grandes divergências entre resultados analíticos e experimentais, e como é dito em Ramaswamy (51) é uma parte do estudo em cascas que necessita com urgência de pesquisas bem elaboradas, com modelos de diversas geometrias para poder-se tirar conclusões mais sólidas sobre o problema.

De maneira geral, a carga de flambagem depende da geometria da casca, ocorrendo minoração na carga crítica sempre que ocorrerem modificações na forma teórica idealizada (baseada na qual foram calculados os esforços), motivados por recalque de apoios e cimbres, carregamentos, grandes deformações e mudanças de dimensões; depende também das condições de apoio, do material de que é feita, do posicionamento da armadura e do tipo de carregamento, observa-se que alguns desses fatores são difíceis de serem avaliados, mas é fundamental que o projetista esteja ciente de sua importância.

Quanto à carga crítica propriamente dita, existem alguns valores que podem servir de orientação para verificação em projetos, em Haas (28) é publicado tabela sintética reunindo valores teóricos e experimentais obtidos por Schmidt e Csonka. Baseado em testes realizados em oito cascas de translação de dupla curvatura com diretriz circular, Schmidt chegou à expressão

$$q_{cr} = 0,32 \frac{F_h^2}{r_x r_y}$$

e, como os resultados foram obtidos de experimentos em cascas metálicas, é recomendado o coeficiente 0,15 ao invés de 0,32 na expressão que fornece a carga crítica de flambagem, para as de concreto armado.

As recomendações de "Criteria of the Design of Reinforced Concrete Shell Structures and Folded Plates" publicado pelo Indian Standard Institution indicam o referido coeficiente como sendo 0,10. A única notícia que trata do colapso de uma casca de dupla curvatura por perda de estabilidade é descrito por Csonka que, baseando seus cálculos nessa casca, recomenda

$$q_{cr} = \frac{F_h^2}{r_x r_y}$$

Outros resultados foram obtidos por V.Gioncu (9),

que experimentalmente fixa q_{cr} para parabolóides sobre base quadrada, de acordo com a expressão:

$$q_{cr} = C_{\alpha} \cdot C_{\beta} \cdot C_{\gamma} \cdot q_{cr}$$

sendo q_{cr} = carga crítica teórica de flambagem

$$q_{cr} = k \frac{Eh^2}{r^2}$$

com $0,24 < k < 0,34$

C_{α} - coeficiente que considera a resistência à torção do arco de borda;

C_{β} - coeficiente que considera a distribuição das tensões;

C_{γ} - coeficiente que considera a flecha elástica da casca antes da ruptura.

O coeficiente C_{α} é definido por $C_{\alpha} = 0,12 + 0,44\alpha < 0,56$; $\alpha < 1$. Para $\alpha < 1$ a ruptura irá ocorrer num dos bordos da casca. Para $\alpha > 1$ a ruptura ocorrerá na seção central e não será influenciada pelo arco de borda; α é dado por:

$$\alpha = \frac{2}{\left(1 + \frac{1}{I_t^*} + \frac{1,6}{I^*}\right) \cdot f/h}$$

$$I_t^* = \frac{G_o I_t}{D_o a} \quad ; \quad I^* = \frac{E_o I}{D_o a}$$

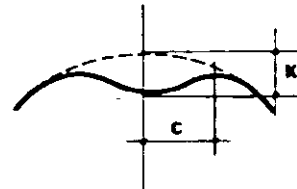
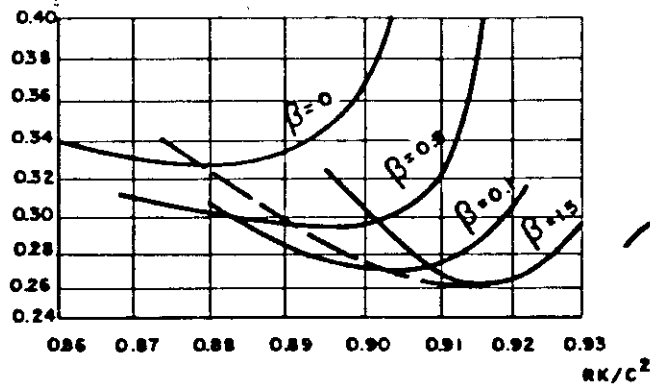
I , I_t → momentos de inércia da viga de borda à flexão e à torção, respectivamente.

G_o → módulo de deformação transversal (em $t=0$)

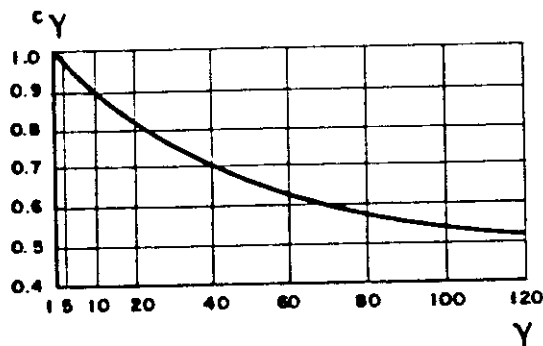
O coeficiente C_{β} será definido com o auxílio de β dado em função de N_x e N_y nos pontos desejados

$$N_x = -\beta q r \quad ; \quad N_y = -(1-\beta) q r \quad \text{e} \quad C_\beta = 1,055 - 0,11 \beta$$

a variação de C_β com β pode ser vista abaixo, $0,5 < \beta < 1,5$.



O coeficiente C_γ é fornecido em função de γ segundo o gráfico



$$\gamma = \frac{\bar{w}}{w_0} \quad \text{sendo } w_0 \rightarrow \text{deformação de membrana no ponto central} \rightarrow w_0 = \frac{qR^2}{Eh}$$

$\bar{w} \rightarrow$ deformação obtida segundo teoria mais exata que considere inclusive o recalque dos apoios.

Para ações de longa duração, será alterado o coeficiente C_γ com a variação de deformabilidade com o tempo.

Com os vários valores fornecidos, pode-se já ter idéia aproximada do valor da carga crítica, observando-se que é fundamental ter-se boas condições de execução, não só para os parabolóides, como também para as demais estruturas em casca ou não, e que também estejam sujeitas a esse efeito.

IV - OS PARABOLÓIDES ELÍPTICOS PRÉ-MOLDADOS

1. CONSIDERAÇÕES GERAIS

Este capítulo visa apresentar em detalhes, aspectos construtivos e de projeto, este apoiado na Teoria exposta no capítulo III, dos parabolóides elípticos - monolíticos e pré-moldados - sobre base retangular, o que também poderá ser transposto para as calotas esféricas, como já se observou nos capítulos I e III.

Visando um estudo mais detalhado mais detalhado dessas estruturas, será feito, de início, um paralelo entre as mais simples e evidentes formas de seccionamento de superfície, verificando e comentando as possibilidades e restrições de cada uma delas e a seguir analisando detalhes de juntas, transporte, influência de nervuras na estrutura monolitizada, padronização de elementos pré-moldados e aspectos de cálculo.

2. COMO SECCIONAR A SUPERFÍCIE DO PARABOLÓIDE

Sendo uma superfície oriunda da translação de um arco de parábola sobre um outro fixo, a primeira idéia que surge para sua sub-divisão é a de "cortá-la" por diversos planos verticais paralelos aos arcos que lhe deram origem, obtendo a superfície seccionada como abaixo.

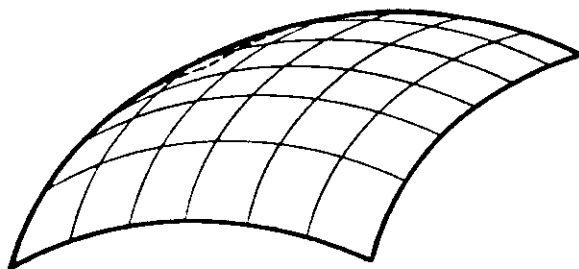


FIG.1 - Superfície seccionada por planos verticais; os módulos podendo ser curvos ou planos.

Com esta forma de seccionar a superfície, os elementos pré-moldados, de dimensões variáveis com o espaçamento entre os planos divisórios, poderão ser curvos ou planos, com a superfície curva, neste último caso, substituída por uma poliédrica que nela é inscrita.

Com esse mesmo critério de subdividir a superfície, somente que com planos divisórios preponderantes em uma direção, pode-se obtê-la através de módulos curvos ou no caso da Fig. 5b, por módulos planos.

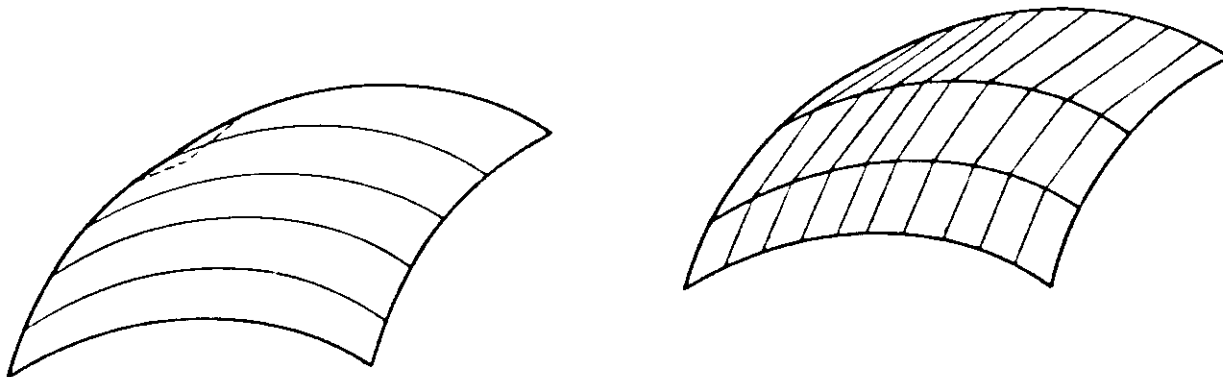


FIG. 2 - Seccionamento da superfície por planos divisórios preponderantes em uma direção

A confecção das fôrmas para as peças pré-moldadas é simplificada em qualquer dos casos, pois basta fazer, a proveitando a dupla simetria da superfície, gabaritos para meio arco de parábola (se os arcos ou o espaçamento entre os planos divisórios for diferente, gabarito de dois meios arcos), e a partir daí fazer combinações entre eles para a fôrma de qualquer peça em qualquer posição.

A primeira forma proposta de subdivisão (Fig. 4) proporciona ao construtor, pelo pequeno número de elementos diferentes, boa padronização na pré-fabricação, propiciando a utilização de peças de pequeno peso, fato que poderá ser fundamental em termos de transporte manual com auxílio de equipamentos leves. Existem porém, muitas peças a serem transportadas e posicionadas para concretagem e elevado número de juntas, as quais exigem fiscalização rigorosa, pois pequenas imperfeições poderão ir se acumulando durante a montagem, resultando ao final, em desagradáveis efeitos es téticos.

A Fig. 5.a apresenta forma interessante para o seccionamento, pois a superfície é obtida através de grandes módulos interligados; neste caso, as peças são de dimensões bem superiores que as anteriores e as conveniências e inconveniências de uma e outra forma serão trocadas; tem-se agora poucas linhas de juntas o que facilita a concretagem e permite obter com maior rapidez e simplicidade o alinhamento das peças, mas, por serem peças de maior porte irão necessitar de aparelhagem de transporte com maior capacidade, principalmente de alcance.

A subdivisão mostrada na Fig. 5.b representa caso intermediário entre os casos das Figs. 5.a e 4, com os elementos sendo mais ou menos alongados, podendo recair nos tipos anteriores com as respectivas características, que poderão ser atenuadas de acordo com as dimensões adotadas.

O seccionamento da superfície por planos verticais como nos casos apresentados, conduz a juntas que também serão verticais e isto simplifica o posicionamento de

possíveis nervuras ao contorno das peças pré-moldadas, sendo suficiente que suas fôrmas sejam mantidas no prumo e definidas suas cotas inferiores. Como inconveniente dessa forma de seccionamento tem-se que as linhas de nervuras não irão acompanhar a curvatura de superfície, provavelmente afetando a continuidade dos esforços de membrana e provocando perturbações localizadas nas juntas e proximidades, o que não é interessante.

Outra disposição para as linhas de nervuras é fazê-las de tal modo que acompanhem a curvatura da superfície, e isto é obtido se a superfície for cortada por planos paralelos ao que contém, na seção considerada, a diretriz ou a geratriz, as quais serão correspondentemente normais à inclinação da geratriz ou diretriz, na referida seção; com isso, as linhas de juntas acompanharão a curvatura da superfície, possivelmente sem alterar, ou alterando menos, a distribuição dos esforços.

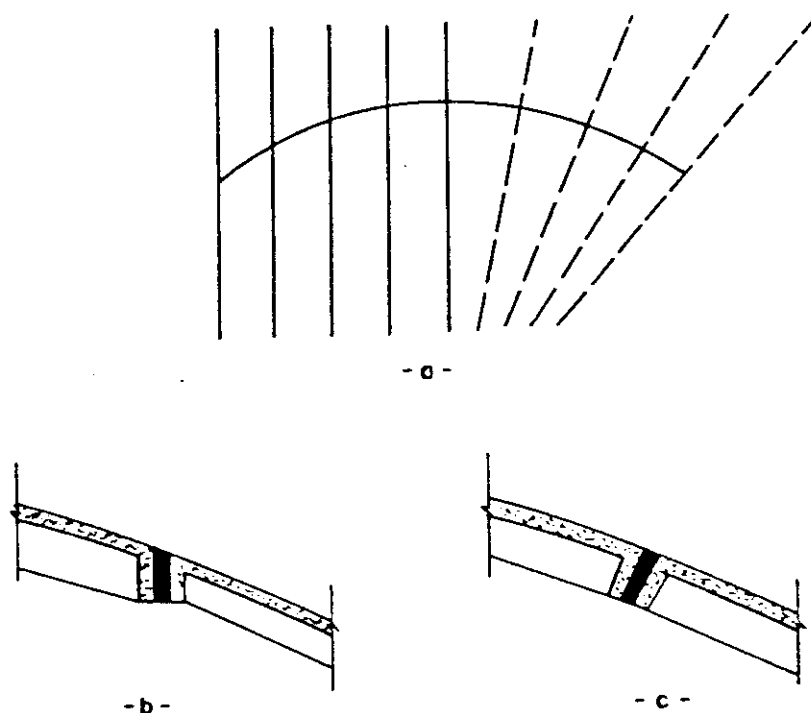


FIG. 3 - a - seccionamento da superfície por planos verticais e radiais

b - junta característica de elementos com nervuras verticais

c - junta característica de elementos com nervuras que acompanham a curvatura

Os casos descritos de seccionamento aplicam-se a diversas relações entre os vãos 2a e 2b. Quando as duas parábolas geradoras da superfície são idênticas, esta pode ser também formada a partir da rotação de uma delas sobre o respectivo eixo vertical sendo a seguir cortada por quatro planos verticais paralelos dois a dois, formando o parabolóide de revolução sobre base retangular. Sendo, nestas condições, o parabolóide também uma superfície de revolução, pode-se tirar partido dessa característica para novas orientações acerca da subdivisão; e isso é feito principalmente quando os vãos são iguais, traçando-se linhas e círculos concêntricos segundo os meridianos e os paralelos, respectivamente, resultando no final num parabolóide constituído de elementos curvos, quadrangulares e triangulares, com poucas variações nas formas. Essa subdivisão pode ser observada na Fig. 7.

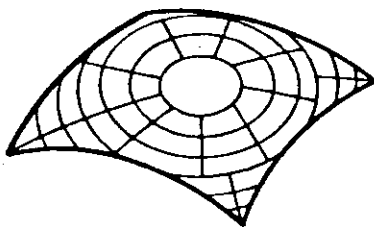


FIG.4- Seccionamento da superfície por linhas segundo os meridianos e círculos segundo os paralelos.

Neste caso também surgirão dificuldades construtivas, muitas peças a transportar, muitas linhas de escoramento e juntas, exigindo fiscalização rigorosa na confecção destas; as vantagens são as mesmas citadas no caso de se utilizar peças de pequenas dimensões.

As subdivisões mostradas nas Figs. 4 e 5 serão

objeto de estudo mais detalhado, no qual se procurará fornecer elementos de projeto para ambas, pensando-se também nos aspectos construtivos e arquitetônicos.

3. PARABOLÓIDES FORMADOS POR ELEMENTOS PLANOS

Sendo os parabolóides em análise abatidos, as suas superfícies apresentam, nas regiões centrais, conformações planas, característica que propicia a construção dessas coberturas utilizando-se elementos pré-moldados planos, com a superfície seccionada conforme o proposto na Fig. 4, sem que a nova geometria fique alterada em demasia em relação à original.

Como nas regiões de bordas e cantos as inclinações são mais acentuadas, pode-se optar por uma solução que é a de utilizar elementos planos na região central e curvos (acompanhando a curvatura da superfície) nas regiões de ligação com os apoios, o que irá proporcionar melhores condições de acabamento caso se queira que estes continuem com diretriz curva. Tanto no caso de se utilizar somente elementos planos como no caso de utilizar também os curvos, os elementos típicos serão retangulares na seção central e sofrerão distorções, tornando-se rômnicos, à medida que ocupam posições próximas aos cantos. Tal variação de forma é necessária para que sejam obtidas juntas de largura constante e sem ressalto em toda a superfície, exigindo para tanto, que algumas peças tenham no sentido dos cantos suas diagonais alongadas.

As duas soluções para as formas básicas das peças: planas ou planas e curvas conduzem a boa padronização dos elementos com poucas variações de geometria, tendo como resultados imediatos: redução nos gastos com os moldes de concretagem, pela reutilização das fôrmas, e com mão-de-obra.

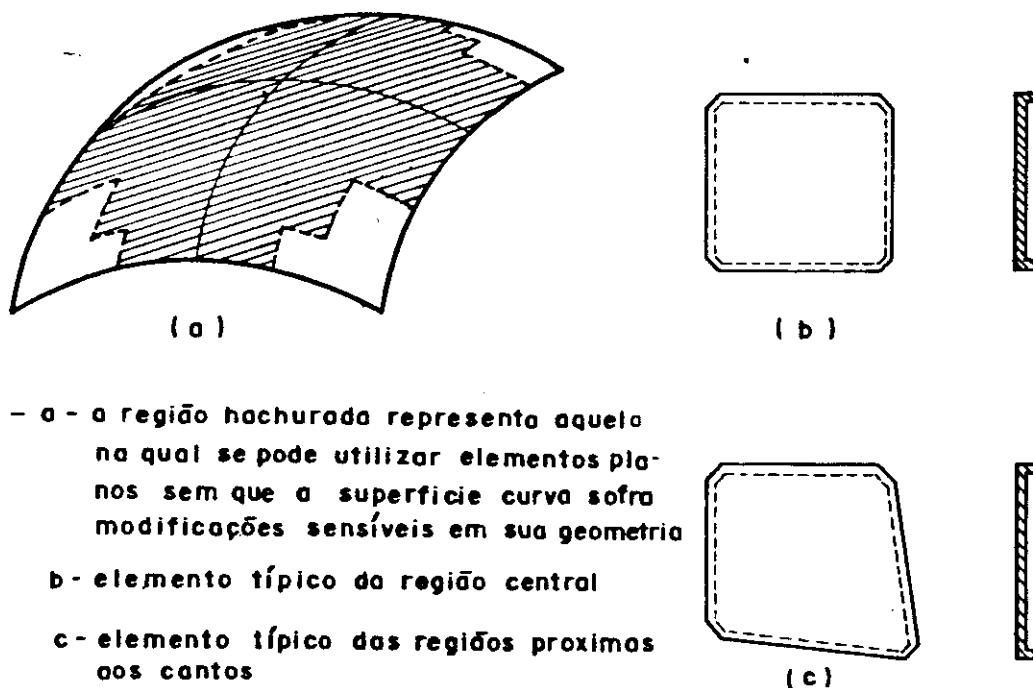


FIG. 5 - a - a região hachurada representa aquela na qual se pode utilizar elementos planos sem que a superfície curva sofra modificações sensíveis em sua geometria

b - elemento típico da região central

c - elemento típico das regiões próximas aos cantos

Definidas as formas básicas possíveis com a subdivisão em estudo, o problema seguinte a ser resolvido é o da definição das dimensões das peças, as quais são dependentes do posicionamento de cada uma, do tipo de junta a ser executada, da curvatura da superfície (que limitará as dimensões das peças planas para que a geometria básica da superfície seja mantida) e da intensidade dos esforços principais de tração e até onde atuam. Quanto ao problema das juntas e dos esforços de tração, existem duas soluções básicas: ou executar juntas que resistam a essas trações ou utilizar peças de dimensões tais que não fiquem com suas juntas situadas nas zonas tracionadas. Observe-se que a segunda solução está ligada à geometria da superfície, podendo tornar-se inviável se a forma final da cobertura fugir em demasia da inicialmente idealizada. Concluindo, se for possível o uso de elementos que não dêem problemas nas juntas e sem que sejam peças de dimensões que afetem exageradamente a geometria final do parabolóide e que permitam também o

transporte manual; a segunda opção é a mais conveniente, inclusive por reduzir o cimbramento; caso contrário, deve-se pensar na solução com peças menores com juntas que resistam satisfatoriamente às solicitações de tração.

Como elemento para fixação das dimensões das peças, tem-se que as limitações da região tracionada estão contidas aproximadamente na seção triangular de lados 0,6a (diminuindo com o incremento da curvatura) medidas a partir dos cantos, correspondendo a uma parcela de 20% da área total; esses limites poderão ser determinados com maior precisão através dos resultados do cálculo estático do parabolóide.

Pensando tão somente na geometria, as dimensões das peças pré-moldadas estão condicionadas a algumas verificações para que, como já foi frisado, não surjam diferenças sensíveis entre a superfície originalmente curva e a que vai ser obtida após o rejuntamento das peças, sendo necessário definir numericamente a região na qual é possível o uso de peças planas, a necessidade ou não de elementos com diagonais alongadas e as dimensões dos elementos curvos (caso ocorram), de acordo com a discretização feita. As verificações geométricas feitas, visando inscrever na superfície curva uma outra poliédrica, foram as de comparar os comprimentos das diagonais e a área dos elementos planos respectivamente com as distâncias entre as cotas extremas e a área do elemento curvo correspondente, determinado pela intersecção dos planos divisórios com a superfície do parabolóide. Essas verificações permitem avaliar o quanto se está afastado da superfície curva sem erros sensíveis e quais as dimensões das peças, retangulares ou rômbricas, planas ou curvas, a serem adotadas.

Pelo exemplo de cálculo feito adiante, tem-se condições de avaliar a otimização que se consegue com o uso de elementos planos.

Quando forem utilizadas peças de peso conveniente para o transporte manual (ou com auxílio de equipamento le

ve), corre-se, como já dito, o risco de algumas conexões entre elas situarem-se em zonas solicitadas por tração, neste caso existem algumas soluções para minorar ou mesmo eliminar esse inconveniente. A primeira delas envolve mudanças na geometria do parabolóide pelo aumento da curvatura que, caso seja possível, provoca reduções nos esforços principais de tração (ver final do Capítulo III), podendo estes serem confinados em menores regiões e reduzidos a módulos tais que as juntas interessadas não fiquem tão desfavoravelmente solicitadas, o que minora o problema.

Outra solução é a execução de juntas dotadas de armadura de tração unidas por trespasse ou solda e suficientemente ancoradas nas peças, que apresentem condições satisfatórias de resistência sem abertura exagerada de fissuras. Assim, utilizando-se de peças de concreto armado com espessura de 4 ou 5cm, pode-se fazer entalhes em suas superfícies laterais, cuja função é a de permitir que a armadura colocada nas juntas tenha comprimento suficiente de ancoragem, assim como possibilitar melhor comportamento do concreto face aos esforços de cisalhamento preponderantes nas bordas e cantos, evitando o aparecimento de trincas e fissuras motivadas pelo deslocamento relativo entre as peças causadas por essas solicitações.

Segundo Baikov (8), para que as juntas executadas como prescrito acima tenham boas condições de serviço, é necessário que sejam respeitadas as condições especificadas e fixadas para a junta entre duas peças, vista na Fig. 9.

Outra forma para a disposição da armadura da junta, que ao invés de resultar do prolongamento das armaduras das peças vizinhas (forma cujo inconveniente é o de poder surgir imperfeições nas juntas por estarem as armaduras em um mesmo nível e acarretar maior dificuldade construtiva), é formada pelo prolongamento das armaduras das peças até a linha média das juntas e então superpor àquelas uma outra encaixada nos entalhes.

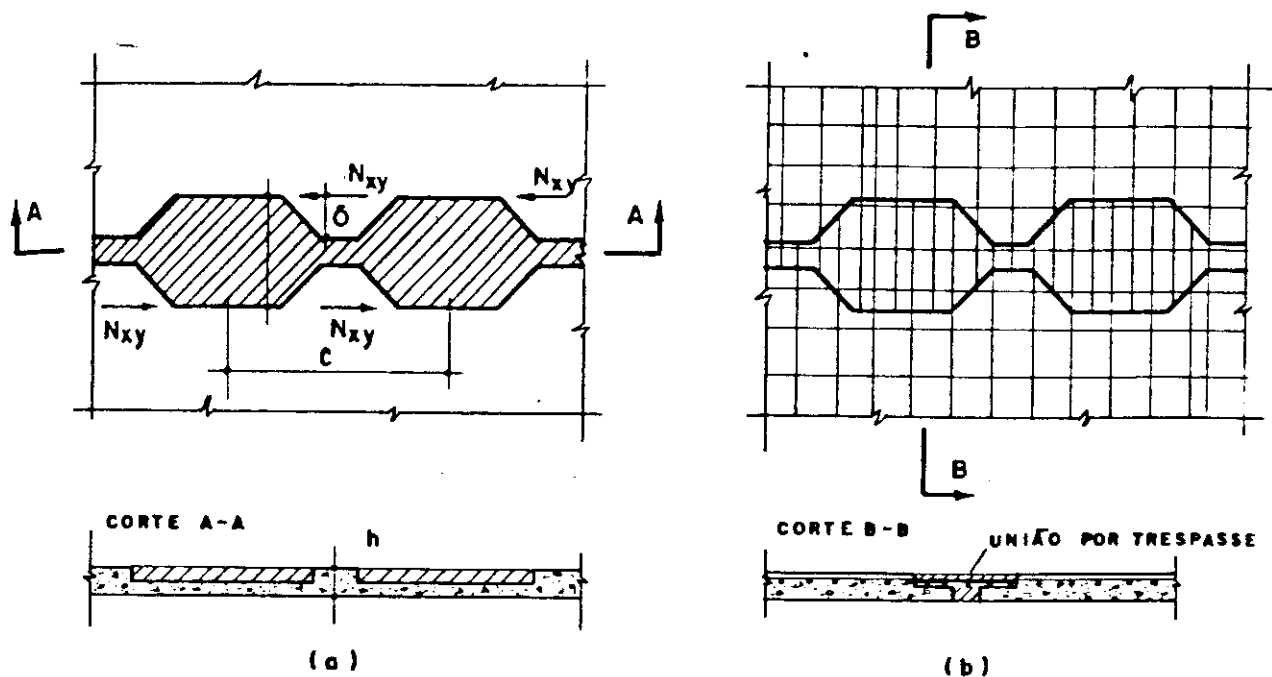


FIG. 6 - Características geométricas e de resistência das juntas

- Condições de resistência para as juntas

1 - face ao esforço de cisalhamento

$$\ell_b \cdot h \cdot f_{td} \cdot K \geq S_d = N_{xy,d} \cdot c$$

2 - face à resistência por esmagamento por compressão

$$\delta \cdot h \cdot f_{cd} \geq S_d = N_{xy,d} \cdot c$$

onde f_{td} , f_{cd} → resistência axial, de projeto, do concreto à tração e à compressão, respectivamente;

$N_{xy,d}$ → esforço de cisalhamento de projeto;

K → coeficiente experimental igual a 4 para juntas comprimidas e igual a 2 para as não comprimidas.

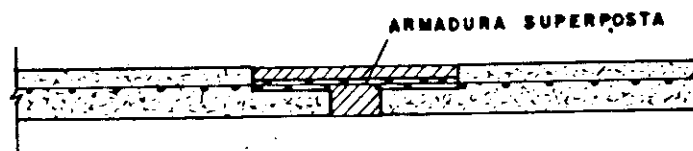


FIG. 7 - Junta entre duas peças com armadura superposta

Nas ligações com os apoios, também é inconveniente executar nas peças entalhes laterais.

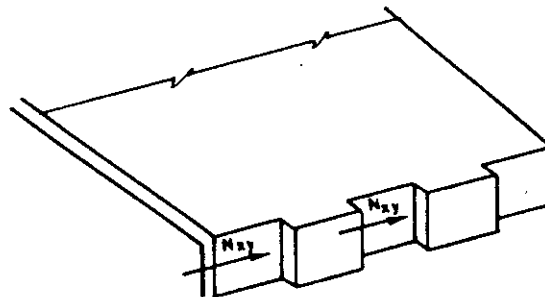


FIG. 8 - Face lateral das peças na junção com os apoios

No caso de ser utilizada argamassa armada para a fabricação das peças, as soluções anteriores não são mais aplicáveis pois as espessuras serão da ordem de 2 - 2,5cm, porém, como para tais peças é conveniente dispor nervuras ao longo de seus perímetros, que facilitarão a desforma e o transporte e conferirão à estrutura posteriormente monolitizada, maior estabilidade e um interessante efeito estético, as armaduras das juntas poderão ser dispostas como na Fig. 12.

Observe-se que o fato de estarem as armaduras em cotas diferentes nas duas peças, não causará maiores problemas construtivos, pois essas alturas serão constantes ao longo de cada linha divisória para as peças dispostas em um mesmo lado.

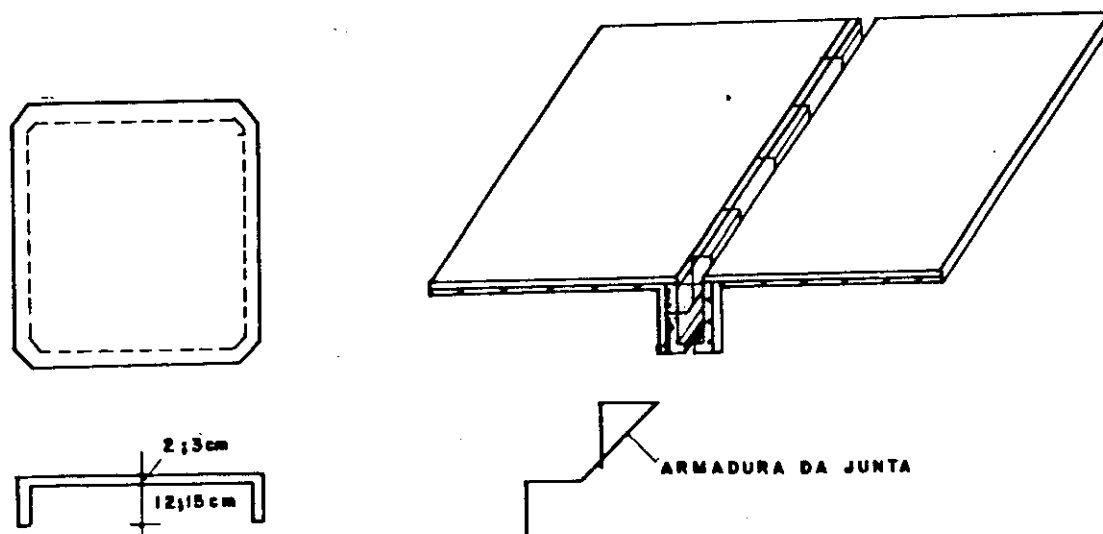


FIG. 9 - Peça em argamassa armada, dimensões típicas, juntas

A largura das juntas está condicionada a fatores construtivos, sendo que as observações de cunho prático indicam que essa largura deve ser no mínimo 3cm para juntas entre peças com menos de 10cm de espessura e 5cm para juntas entre peças de espessuras maiores.

Para a união das peças pode-se recorrer também a adesivos (capazes de resistir a diferentes solicitações), procedimento que irá conduzir a juntas de espessuras mínimas, o que no entanto não é adequado quando se trabalha com peças planas, pois as peças pré-moldadas provavelmente não terão em grande parte da cobertura suas superfícies laterais num mesmo plano, além de existirem muitas juntas a serem executadas e o trabalho de colagem acompanhado da necessidade de alinhamento das juntas ser dificultado, e o custo poder não ser compensador.

Como as solicitações de tração atuam numa pequena faixa, com suas direções e intensidades estando bem definidas, pode-se também, para minorá-las ou eliminá-las, protender o parabolóide nessas regiões mais desfavoráveis ou protender os elementos laterais de apoio, que pela interação com a casca reduzirão nesta as trações principais.

A protensão (que irá envolver esforços de pequena intensidade) na superfície do parabolóide é mais interessante para as juntas e é executada com os cabos ou fios distribuídos paralelamente às direções das trações principais, eliminando-as e possibilitando que as juntas passem de traçadas a comprimidas.

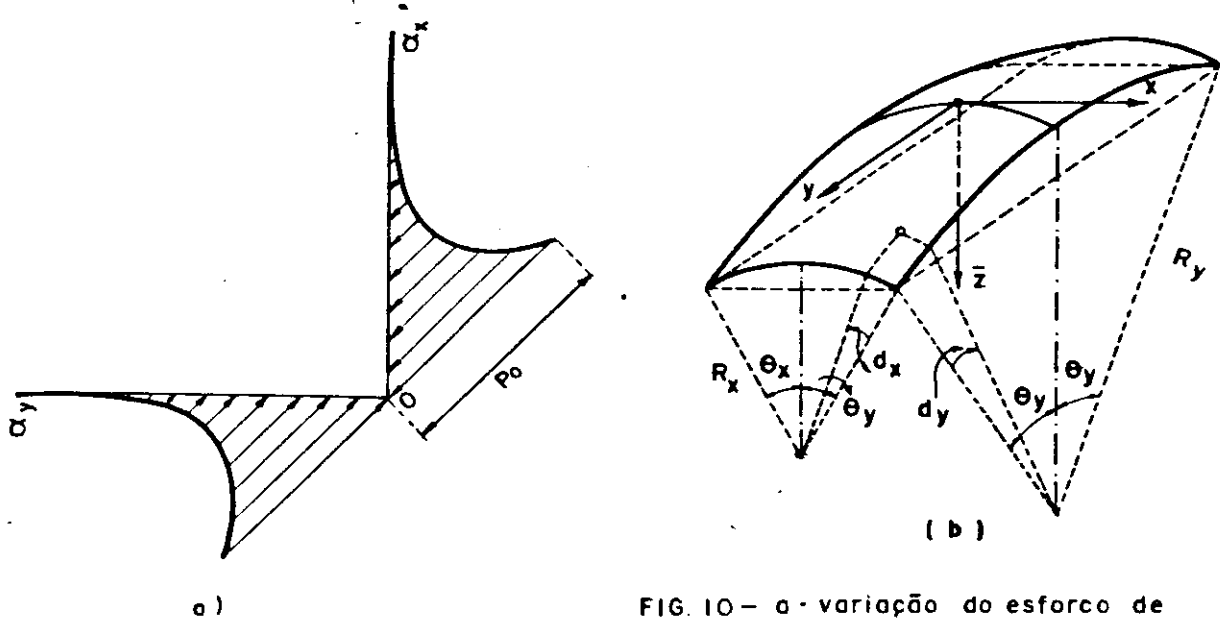


FIG. 10- a - variação do esforço de protensão

b - geometria do parabolóide

Desde que a variação dos esforços principais de tração têm, nos cantos, forma semelhante à da Fig. 13.a e que atuam inclinadas segundo um ângulo constante a aproximadamente igual a 135° (a partir do eixo coordenado ox), pode-se adotar de modo aproximado a variação para a protensão, conforme o proposto por Hruban(34) no World Conference on Shell Structures (San Francisco, 1962), que atua como uma carga distribuída, de sentido contrário às cargas permanentes, provocando os seguintes esforços de membrana num ponto definido por $\alpha = \alpha_x + \alpha_y$:

$$N_x = N_y = - \frac{P_0}{2\sqrt{2}} \phi_0(\alpha) + \phi_1(\alpha) \quad e$$

$$N_{xy} = + \frac{P_0}{2\sqrt{2}} \phi_0(\alpha) + \phi_1(\alpha)$$

cuja combinação provocará, em cada ponto, um esforço de intensidade igual a $2N_x$ com sentido contrário ao provocado pelas cargas permanentes, sendo

$$\phi_0(\alpha) = e^{-\beta\alpha}$$

$$\phi_1(\alpha) = \phi_0(\alpha)\cos\beta\alpha$$

com α_a e α_y vistos na Fig. 13.b.

O parâmetro β é determinado num ponto de $P(\alpha)$ conhecido, ou em outras palavras, verifica-se até onde a protensão é necessária para que as juntas fiquem favoravelmente solicitadas e nesta seção, tendo-se $P(\alpha)$ e α , torna-se possível conhecer β . Por exemplo, se for admitido que a protensão é necessária até o ponto na borda onde $P(\alpha) = 0,1P_0$, tem-se $\alpha = 0,30$, $\beta\alpha = 1,59$ e daí,

$$\beta = \frac{5,3}{\theta} \quad (\text{Para } \theta_x = \theta_y = \theta).$$

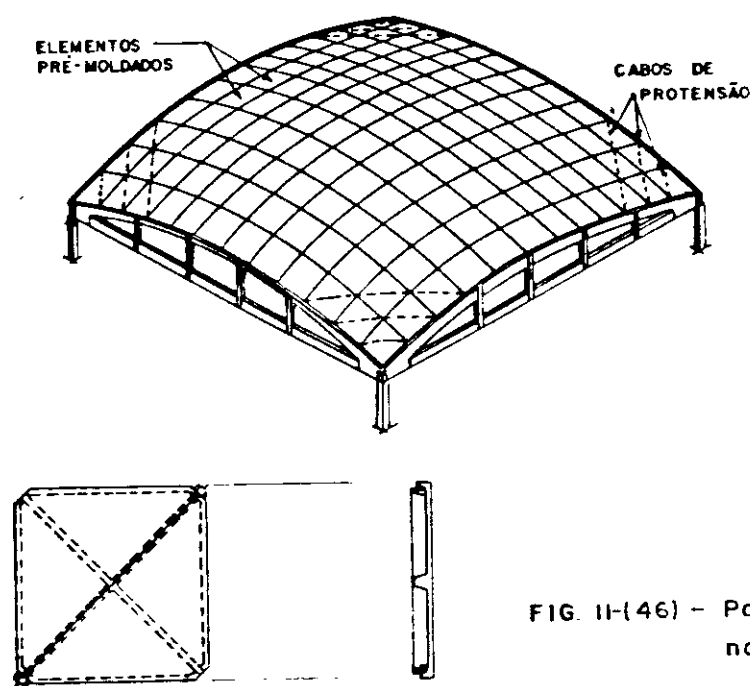


FIG. II-(46) - Parabolóide protendido nos cantos

Essa forma de protensão já foi utilizada em obra descrita em Murashev (45), com os cabos alojados em nervuras localizadas segundo as diagonais dos elementos paralelos às direções principais de tração e ancorados nos apoios de borda, conforme Fig. 11.

Melhor solução para o alojamento dos cabos nas peças pré-moldadas é a de incrementar a espessura destas nas regiões mais solicitadas (incremento necessário mesmo quando não se protende a superfície), dispondo-se os cabos em número de 1 a 4 cordoalhas em bainhas chatas (de pequena altura e apropriadas para peças delgadas) inseridas na superfície do parabolóide. Com essa disposição dos cabos, certamente se tem melhor uniformização na distribuição dos esforços de compressão oriundos da protensão sobre a casca.

A ancoragem nos arcos ou tímpanos não constitui problema grave, visto que não haverá perigo de tombamento lateral destes por estarem contraventados pela própria casca e os esforços de protensão serem de pequena potência, exigindo normalmente para a cravação da ancoragem, larguras para os apoios não maiores daquelas necessárias para suportarem os carregamentos de peso próprio juntamente com aqueles provenientes da casca; caso a largura do apoio não seja suficiente, pode-se executar parte da ancoragem localizada na própria casca, através de um maior espessamento desta.

A outra forma de protensão executada sobre a viga tem efeito mais sobre a própria viga e na ligação desta com o parabolóide e sua teoria de cálculo pode ser encontrada na referência (3); seus efeitos sobre os esforços da casca nas bordas são obtidos a partir da interação casca-apoio e não têm grande influência sobre as juntas, não sendo portanto o mais conveniente para resolver o problema específico das juntas. É uma forma de protensão comumente usada (exemplos podem ser vistos na Fig. 1) quando os vãos são grandes e os esforços sobre os apoios tornam-se elevados.

Do comentado sobre a pré-moldagem com peças pla

nas, pode-se concluir que existem problemas geométricos e estruturais a serem contornados, sendo apresentados para as duas formas básicas algumas soluções; a partir dessas informações, que visam fornecer subsídios para a escolha das dimensões das peças planas e para a forma de ligação entre elas, e com as características locais da obra (inclusive e equipamento de transporte disponível) e de arquitetura, pode-se optar ou não por essa solução de pré-moldagem para os parabolóides. Cremos que a solução com peças planas nervuradas e em argamassa armada é o mais razoável, por reduzir o peso próprio da cobertura, minorar, por suas maiores dimensões, os problemas com juntas, diminuir o número destas e ser uma estrutura, após monolitizada, esteticamente elegante.

4. PARABOLÓIDES FORMADOS POR ELEMENTOS CURVOS

Outra forma prática para as peças pré-moldadas são os módulos curvos que acompanham a curvatura da superfície; neste caso, as dimensões são bem superiores às planas e possibilitam que a forma final da superfície seja idêntica, ou quase, àquela que seria obtida caso o parabolóide fosse concretado in loco.

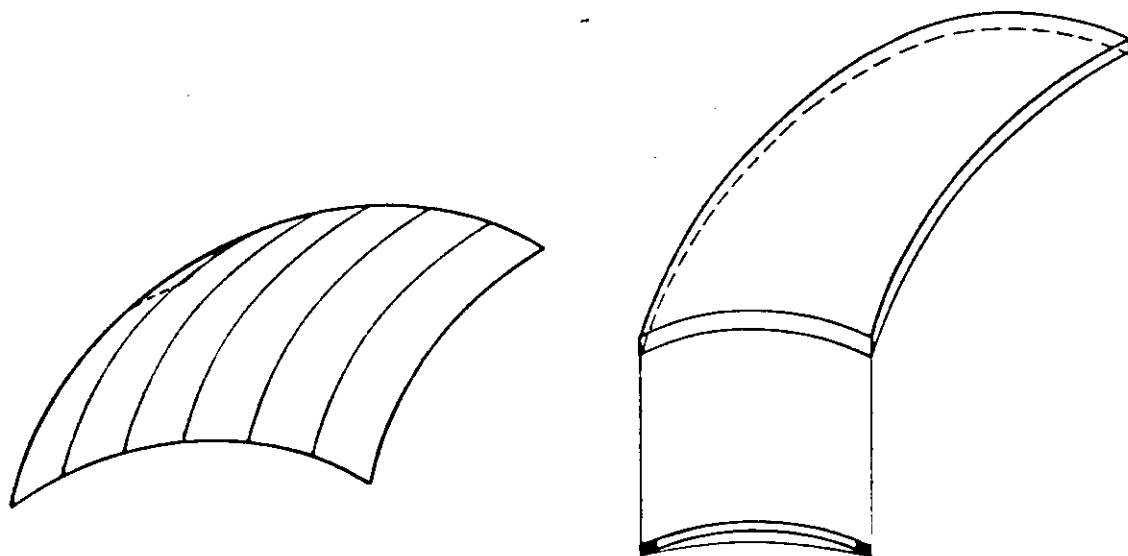


FIG 12 - Seccionamento da superfície; elemento típico.

Verifica-se de imediato que com tal forma, pelas dimensões das peças, é obtida maior padronização que nos casos anteriores e os problemas com as juntas praticamente deixam de existir.

Tratando-se de módulos de maior porte, é necessário fazer estudo mais apurado das solicitações a que estarão sujeitas antes de serem rejuntadas entre si e aos apoios, verificando-se as situações de apoio das peças isoladas e os esforços que podem surgir quando dos transportes horizontal e vertical. Portanto, durante o transporte e enquanto estiver sobre o cimbramento sem conexão mais íntima com os demais, cada elemento é uma "casquinha" cujo estado de tensões deve ser investigado para ser dimensionado corretamente, poder-se estabelecer dimensões apropriadas e melhor forma de levantamento.

No cálculo da estrutura monolítica, considera-se esta comumente, em uma primeira análise, como simplesmente apoiada em elementos que apresentam rigidezes em seus planos de tal ordem que impeçam deformações verticais e absorvam o efeito de arco existente nas bordas. Numa segunda etapa de cálculo podem ser feitas correções dos esforços nas proximidades dos apoios, tomando-se a rigidez real destes e compatibilizando os deslocamentos da casca e dos apoios. Para as peças pré-moldadas pode-se admitir as mesmas hipóteses de cálculo da estrutura monolítica e seus comportamentos serão semelhantes ao daquela, ainda que muitas vezes devido à pequena relação entre as flechas (f_x/f_y) surgirem modificações na maneira pela qual o peso próprio é equilibrado, sendo, neste caso, resistido essencialmente por esforços normais na direção y , surgindo maiores esforços de flexão com minoração dos de membrana, na direção x .

Como no caso da estrutura final da cobertura que necessita de elementos enrijecedores (arcos, tímpanos) no contorno, é de essencial importância que as peças pré-moldadas de dupla curvatura também o tenham, podendo ser representados por nervuras, que absorverão as trações nas bordas,

impedindo ou suavizando deformações nessas regiões ao mesmo tempo que colaboram para mais fácil retirada das peças dos moldes de concretagem e tornam mais eficiente e seguro o levantamento. As nervuras conferirão à estrutura final maior rigidez à flambagem possibilitando reduções nas espessuras dos módulos, sem perigo de perda de estabilidade. A carga crítica para a superfície nervurada pode ser avaliada segundo a expressão abaixo, válida desde que o espaçamento máximo entre nervuras (Baikov (8) seja inferior a $b = 7 \sqrt{Rh}$, sendo R o menor raio de curvatura da superfície.

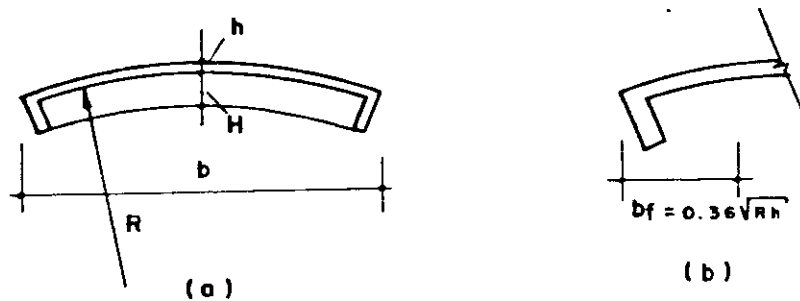


FIG. 13 - a - geometria da seção transversal
b - largura da mesa de compressão

O transporte e o levantamento das peças também são favorecidos pela presença das nervuras. Segundo investigações teóricas e experimentais realizadas em modelos e resultados de obras realizadas (Doganoff (19) constatou-se que tais peças são capazes de suportar pequenas torções causadas por recalques em um dos apoios durante o transporte ou quando estão dispostas sobre cimbramento passível de deslocamentos ou que não estejam corretamente nivelados, sem maiores consequências.

De acordo com especificação da norma russa para concreto armado, para peças de peso superior a uma tonelada as tensões oriundas do transporte e elevação, dever ser calculadas com o peso próprio majorado de 50%.

Recomenda-se então, pelos motivos descritos, que as peças sejam providas de nervuras enrijecedoras ao longo das quatro bordas, procurando manter sempre que possível,

na superfície final a dupla simetria de forma e também a mesma rigidez nas direções principais para não descaracterizar o comportamento do parabolóide e também para que o cálculo, de acordo com as hipóteses adotadas, conduza ainda a resultados satisfatórios. Existem outras formas construtivas para os módulos com diferentes situações de apoio, como por exemplo, a "casquinha" sem nervuras laterais, ficando simplesmente apoiada sobre o equipamento de transporte ou sobre o cimbramento; neste caso, a peça tem impedido somente o seu deslocamento vertical, surgindo (como esperado) trações nas bordas por não existir efetivamente interação com o apoio. A peça pode também ser construída nervurada em somente uma direção, o que também representa solução inferior à primeira, pois aparecerão nas bordas livres esforços de tração e ainda deslocamentos verticais em uma peça que vai rejuntada a outras.

Para ilustrar o comentado acima, o quadro mostrado a seguir apresenta para as mesmas condições de carregamento a comparação entre os esforços e flechas obtidas do cálculo da "casquinha" com quatro e dois apoios.

Dimens. 2ax2b(m)	5x2	5x2	5x3	5x3	6x2	6x2	6x3	6x3
Apoio	livre em $\pm b$	em 4 lados	livre em $\pm b$	em 4 lados	livre em $\pm b$	em 4 lados	livre em $\pm b$	em 4 lados
F_1, max (KN/m)	+254,0	+14,0	+307,0	+28,0	+366,0	+14,2	+447,0	+28,0
w_{max} (m)	$4,3 \times 10^{-2}$	$5,3 \times 10^{-4}$	$3,7 \times 10^{-2}$	$8,5 \times 10^{-4}$	$8,8 \times 10^{-2}$	$5,0 \times 10^{-4}$	$7,4 \times 10^{-2}$	$8,0 \times 10^{-4}$

F_1 → esforço principal de tração w → deslocamento vertical

- Comparação entre esforços e deslocamentos máximos de parabolóides sobre quatro e duas bordas.

Visto a necessidade de enrijecer lateralmente as peças pré-moldadas, a maneira de como fazê-lo é o que se analisa a seguir.

As soluções básicas a serem adotadas são duas:

ou fazer enrijecimento provisório ou permanente, existindo para cada caso diversas formas e disposições sobre os elementos. Adotando-se nervuras permanentes concretadas juntamente com as peças, após estas serem rejuntadas, ter-se-á o parabolóide com diversas linhas de nervuras em sua superfície inferior, caso as "nervuras" sejam provisórias, deverão ter enquanto forem necessárias (isto é, até o endurecimento e cura da argamassa de rejuntamento), interações tal com os elementos pré-moldados que iniba as deformações destes. São vistas abaixo as duas soluções.

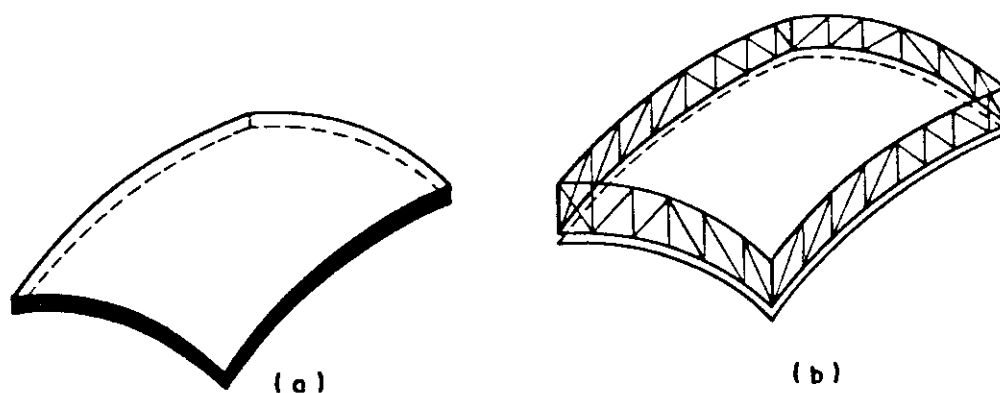


Fig. 14 - a - elemento pré-moldado com nervuras permanentes

b - elemento pré-moldado com nervuras provisórias em arco treliçado metálico ou em madeira.

A opção de utilizar uma ou outra solução deve ser feita após analisado o custo dos materiais envolvidos e os aspectos construtivos; por exemplo, no caso de apoios provisórios, estes podem ser executados em aço ou madeira, efetuando-se a conexão com a peça através de parafusos e aruelas chumbados no concreto. Tal procedimento já foi utilizado por Doganoff (19), que enrijeceu provisoriamente os módulos com arcos metálicos treliçados, semelhantes aos da Fig. 17.b, para a construção de diversas calotas esféricas sobre base quadrada. Em nosso País, o custo do aço não aconselha a adoção de tal critério de enrijecimento (ainda que provisório), observando também que o número de arcos metáli

cos pode ser elevado, dependendo da quantidade e dimensões das peças.

Já a solução de utilizar elementos com bordas nervuradas permanentemente tem como inconveniente apenas que não se obtém o paramento inferior liso, o que não tira a harmonia de forma da estrutura e, ao contrário, se bem executada produz interessante efeito estético. Uma opção que torna a superfície lisa, encobrindo as nervuras e conferindo à cobertura melhores condições térmicas e acústicas, é a vista abaixo, onde os módulos são "caixotes" de dupla curvatura.

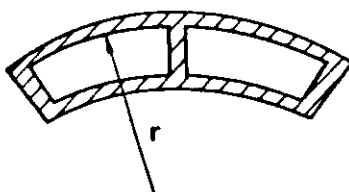


FIG. 15 - Seção transversal do "caixote"

Esta forma favorece o uso da argamassa armada pois, na fase de construção, os módulos sendo abatidos, poderão atuar temporariamente como placas, o que exige nervuras menos espaçadas e que agora podem ser encobertas pela superfície inferior.

Para o projeto de parabolóides e calotas esféricas constituídos de elementos de dupla curvatura, preferencialmente a solução a ser adotada é a com elementos providos de nervuras permanentes, lembrando que a solução com arcos metálicos ou de madeira foram descartados devido tão somente a aspectos econômicos, permanecendo a validade técnica.

Definida a forma construtiva, pode-se pensar em outros detalhes que influenciem ou otimizem a construção da estrutura final e das peças que a irão compor.

As juntas, neste caso de peças de maiores dimensões, ficarão favorecidas, pois as solicitações principais de tração provavelmente estarão atuando somente sobre os e

lementos próximos aos cantos, não chegando à zona das primeiras conexões entre peças; por precaução, prevenindo carregamentos assimétricos ou com distribuição diferente das cargas permanentes, pode ser interessante executar entalhes nas peças situadas próximas aos cantos e nas conexões com os apoios, como no caso das peças planas. A utilização de adesivos torna-se viável pela boa superfície oferecida para colagem e pelo número reduzido de linhas de juntas.

Em termos de padronização, a escolha de elementos que cubram sozinhos áreas de 5 a 10m² oferece boas condições, pois, como pode ser visto na Fig. 19, uma cobertura de dimensões em planta de 10 x 10m pode ser feita utilizando-se 8 peças de 5 x 2,50m em dois tipos-padrão. Consegue-se assim reduzir substancialmente o material de consumo nos moldes de concretagem assim como o da estrutura de apoio provisório, havendo necessidade tão somente de quatro arcos de suporte para o rejuntamento das peças.

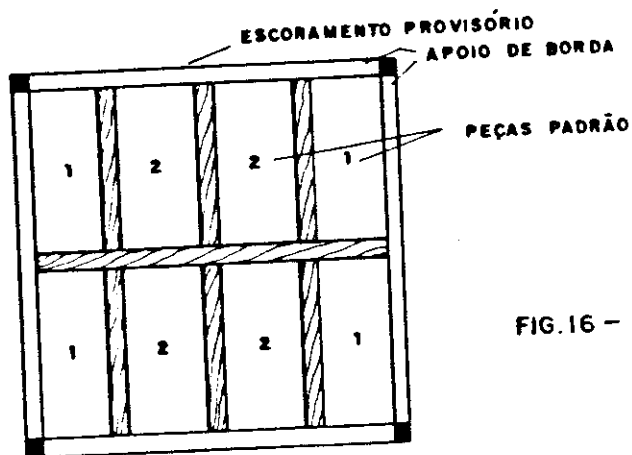


FIG.16 - Vista em planta da cobertura com os escoramentos e as peças pré-moldadas

Quanto à fabricação das peças, é conveniente que se inicie quando do lançamento das fundações e da construção dos suportes do parabolóide, isto porque, provavelmente será gasto maior tempo durante a fabricação das peças que no processo de montagem da cobertura. Durante a construção das peças e as fases que a preceder, devem ser tomadas as precauções comentadas no capítulo II, para não ocorrerem imperfeições que afetem a estética e a segurança da obra.

Com o intuito de serem obtidas peças de geometria coerente com a parte da superfície que irá ocupar e, também para facilitar e melhorar construtivamente as juntas, é conveniente construir os moldes como se a concretagem fosse ser feita de uma só vez, separando-os ligeiramente de acordo com a espessura das juntas, isto é válido também para as peças planas.

Observe-se que as nervuras deverão estar dispostas normalmente à superfície das peças e tal detalhe é para, como foi dito antes, possibilitar melhor continuidade dos esforços, minimizando flexões localizadas.

O processo de retirada das peças dos moldes deve ser efetuado o mais cedo possível, a fim de se reutilizar quase que de imediato as fôrmas; para isso, é necessário ter-se conhecimento da evolução da resistência do concreto, não sendo recomendado a retirada das peças dos moldes sem que o concreto atinja pelo menos 60% (2 a 4 dias) de sua resistência cilíndrica aos 28 dias. O uso de processos térmicos acelerados de cura está condicionado ao número de peças a serem fabricadas e ao local de fabricação: se na própria obra ou se em instalações permanentes, sendo que para obras que envolvam poucos elementos pré-moldados não há essa necessidade, podendo-se empregar cimentos de alta resistência e aditivos no concreto para acelerar o processo de pega e cura. Retirada do molde, a peça que não for submetida a processos acelerados de cura deve ser armazenada e não colocada sobre a posição definitiva, pois pode não apresentar resistência suficiente para suportar sobrecargas e correndo riscos, pela pouca idade em que carregada, de sofrer com maior intensidade os efeitos da deformação lenta. O que foi dito acima aplica-se também às peças planas do item anterior.

A retirada dos moldes pode ser facilitada pela inclusão de ganchos chumbados nas nervuras, sendo colocados em número tal que o concreto seja solicitado dentro de sua capacidade à idade de desmoldagem. A elevação da peça até sua posição definitiva pode ser feita pelos pontos que ser

viram para a desmoldagem, sendo que o concreto, agora sujeito a sobrecargas, deve ter resistência cilíndrica em torno de 80% daquela que irá possuir aos 28 dias, sendo interessante verificar as deformações e sua rigidez à flambagem.

O equipamento de transporte deve abranger a maior área de influência possível, evitando deslocamentos desnecessários no canteiro de obras, e apresentar características que conciliem a rapidez no içamento combinado com vagaroso e preciso posicionamento. As peças durante o transporte, devem ser elevadas uniformemente em todos os pontos, evitando concentrações de cargas em alguns deles, prevenindo assim a peça de sofrer deslocamentos que podem provocar trações e com elas trincas e fissuras e em condições desfavoráveis levar a peça ao colapso.

O sistema de transporte pode assumir aspectos como os vistos abaixo.

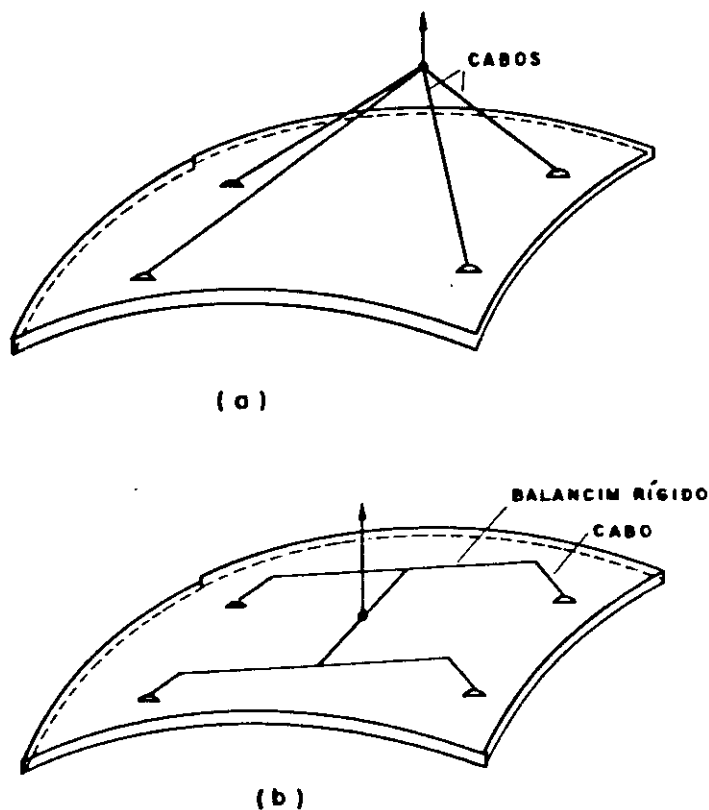


FIG. 17 - Dispositivos de levantamento

O sistema (a) tem como inconveniente que se os cabos-não tiverem a mesma medida ou se o gancho de levantamento não for corretamente posicionado, um deles poderá não ficar ou ficar pouco solicitado durante o transporte e portanto sobrecarregar os demais cabos assim como os locais de apoios nas peças.

A Figura (b) mostra forma mais conveniente para o transporte de peças laminares, que minimiza eventuais erros de medida e posicionamento; ao se levantar todo o sistema ocorrerão ligeiros movimentos até que se alinhem numa mesma vertical, o centro de suspensão do sistema com o centro de gravidade da peça. Caso haja necessidade de maior número de pontos de apoio, estes poderão ser inseridos sem maiores dificuldades e com distribuição semelhante.

Com essa descrição das características estruturais dos parabolóides formados por elementos pré-moldados de dupla curvatura, cremos estar oferecendo uma opção construtiva válida para essas estruturas, cuja construção se executada de uma só vez é dificultada principalmente pelos detalhes de formas, os quais são bastante amenizados quando são poucos e executados em condições favoráveis de serviço; a padronização atingida é grande, a qualidade das peças, representada pelas características de resistência, aparência e impermeabilidade, são favorecidas pelo melhor controle da construção. O único inconveniente desse sistema construtivo é o transporte, que irá envolver equipamento que possua razoável capacidade de alcance para a colocação das peças em suas posições definitivas, no entanto, essa desvantagem certamente é arrefecida pelas vantagens oferecidas.

5. EXEMPLO DE CÁLCULO. ESTRUTURA MONOLÍTICA OU PRÉ-MOLDADA

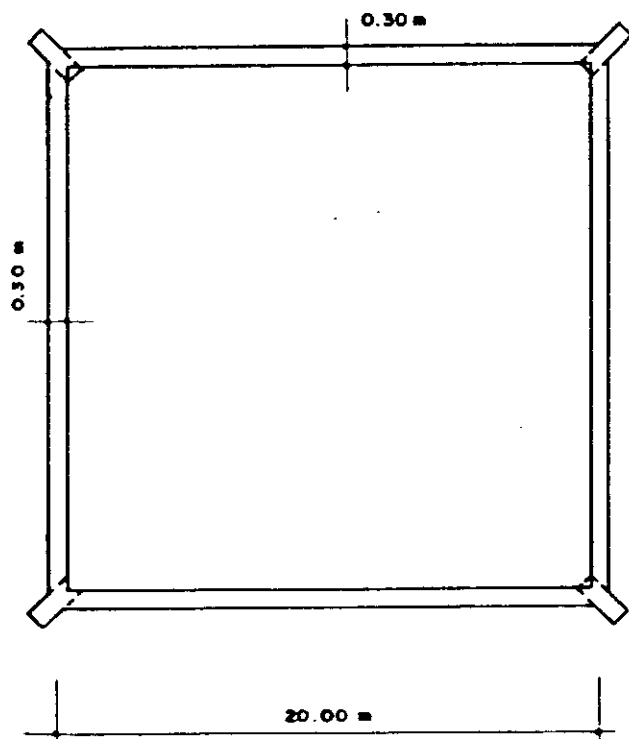
Visto o procedimento adotado para a determinação dos esforços, as hipóteses simplificadoras admitidas, as correções a serem feitas nos esforços de bordas e cantos, as regiões mais solicitadas, as juntas entre os pré-moldados,

será desenvolvida uma sequência de cálculo comentada e o dimensionamento de um parabolóide típico de cobertura, como construído monolítico e como pré-fabricado.

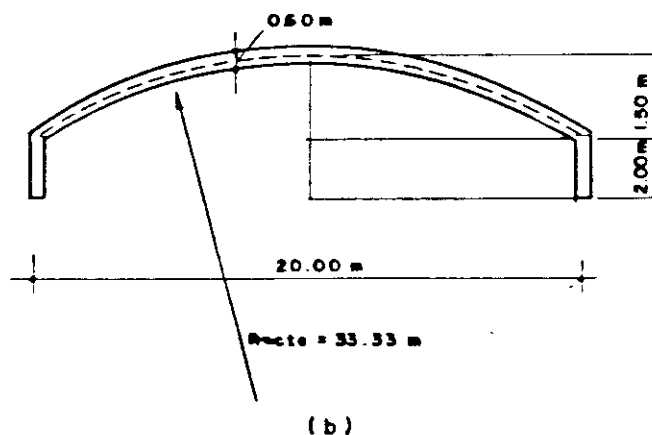
Na falta de informações específicas sobre estruturas em casca na NB-1, serão seguidas as prescrições e recomendações da Norma ACI-318/77 e do documento "Concrete Shell Structures - Practice and Commentary, elaborado pelo ACI Committee 334; da NB-1 serão adotadas as prescrições de âmbito geral aplicáveis no decorrer do dimensionamento. Outras Normas, que não estas, sempre que utilizadas serão citadas no texto.

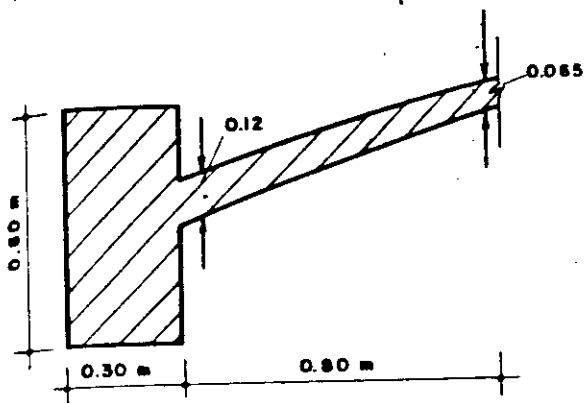
5.1 - Dados geométricos da cobertura; carregamentos de Projeto; características dos materiais

A cobertura a ser dimensionada cobre área aproximada de 400m^2 , sendo apoiada no contorno por arcos que a acompanham a curvatura da casca e que estão engastados nos pilares de cantos. Os dados gerais são vistos a seguir.

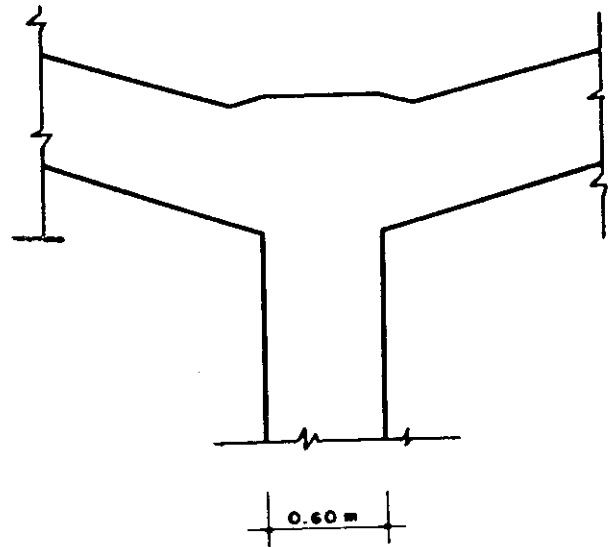


(a)

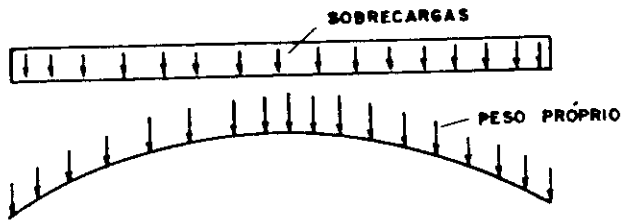




(c)



(d)



(e)

FIG. 18 - Geometria do parabolóide.
Carregamentos.

- a- planta
- b- seção transversal
- c- ligação casca-apoio
- d- ligação arco de borda-pilar
- e- carregamentos de projeto

b) Carregamentos e materiais

- Peso próprio $0,065 \times 25 \text{ KN/m}^2$
 - Sobrecargas $0,5 \text{ KN/m}^2$
 - $q =$ $2,10 \text{ KN/m}^2$
 - Módulo de deformação do concreto (E) $277 \times 10^5 \text{ KN/m}^2$
- * foi considerado o módulo de deformação para carregamentos de curta duração, sendo necessário efetuar correções nas deformações impostas por solicitações de longa duração, assim como nos valores da carga crítica ao longo do tempo
- f_{ck} 18 MPa
 $(1,8 \times 10^4 \text{ KN/m}^2)$
 - Coeficiente de Poisson (ν) $0,20$
 - Armaduras: Aços CA-50 e CA-60

5.2 - Verificação da carga crítica de flambagem

Sendo o parabolóide uma estrutura essencialmente comprimida é interessante fazer-se comparação entre o carregamento de serviço e aquele que ocasiona perda de estabilidade para ter-se idéia da segurança que existe contra esse fenômeno.

Conforme visto, existem alguns valores que estabelecem a carga crítica para as cascas de dupla curvatura; o adotado para esta verificação é o encontrado no Indian Standard Institution (Ramswamy (49)), cujo valor é:

$$q_{cr} = 0,10 \cdot I \left(\frac{h}{r_x r_y} \right)^2 = 0,10 \cdot \pi \left(\frac{h}{r} \right)^2 =$$

$$= 0,10 \times 277 \times 10^5 \left(\frac{0,065}{33,33} \right)^2$$

$$q_{cr} = 10,5 \text{ KN/m}^2$$

Para o carregamento de serviço $q = 2,10 \text{ KN/m}^2$, tem-se um coeficiente de segurança $\gamma_f = q_{cr}/q = 5$, que dispensa, segundo o item 3.1.1.6 da NB-1, a verificação de minorações motivadas pelo decréscimo de deformabilidade com o tempo.

Se o valor de q_{cr} adotado para a verificação fosse o prescrito por Csonka (29) ter-se-ia o coeficiente $\gamma_f = 3$, ainda satisfatório, mas que exige nova verificação considerando-se também o efeito da deformação lenta.

Segundo V. Gioncu (9) ter-se-ia com o arco de dimensões $25 \times 60\text{cm}$ e com os coeficientes c_α , c_β , c_γ e k (9) respectivamente, iguais a 0,525; 1 e 0,20, $\gamma_f = 5$, confirmando o primeiro dos resultados anteriores.

Verifica-se então que o parabolóide com essa geometria e carregamento oferece rigidez à flambagem ainda que os resultados sejam aproximados e algo divergentes (pe lo fato de não existir um consenso geral em se adotar um valor único para a expressão que estabelece a carga crítica); cremos no entanto, que a carga crítica fornecida por Csonka é muito pessimista em relação às demais, que no problema específico faz com que o coeficiente de segurança γ_f oscile entre os valores de 5 a 7 (segundo também outras expressões encontráveis na referência (29)). Concluindo, a estrutura pode ser considerada como não sujeita a perda de estabilidade, desde que sua geometria não seja alterada durante a construção, sem maiores verificações da variação da deformabilidade com o tempo.

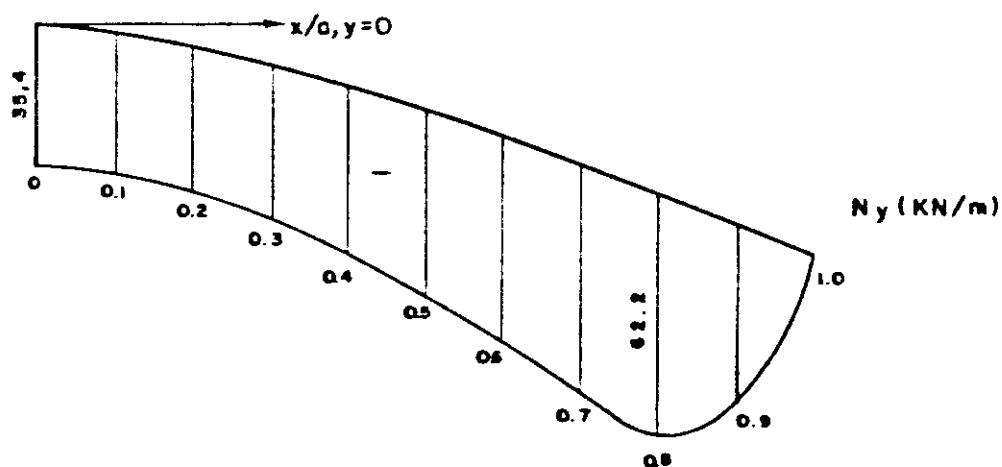
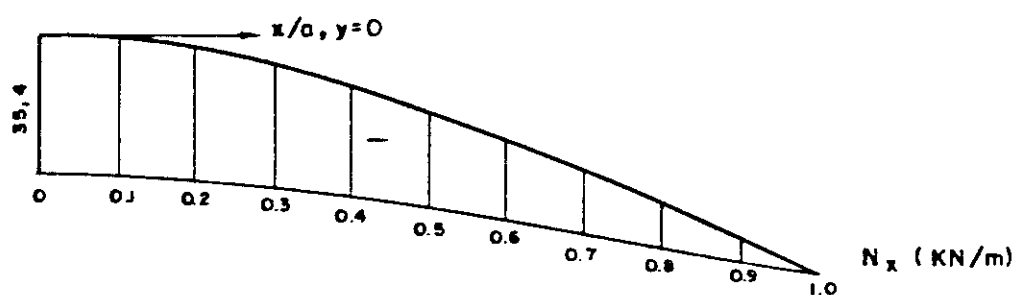
No parabolóide pré-moldado a carga de flambagem será influenciada pelo enrijecimento proporcionado pelas nervuras; esse aspecto será tratado mais à frente.

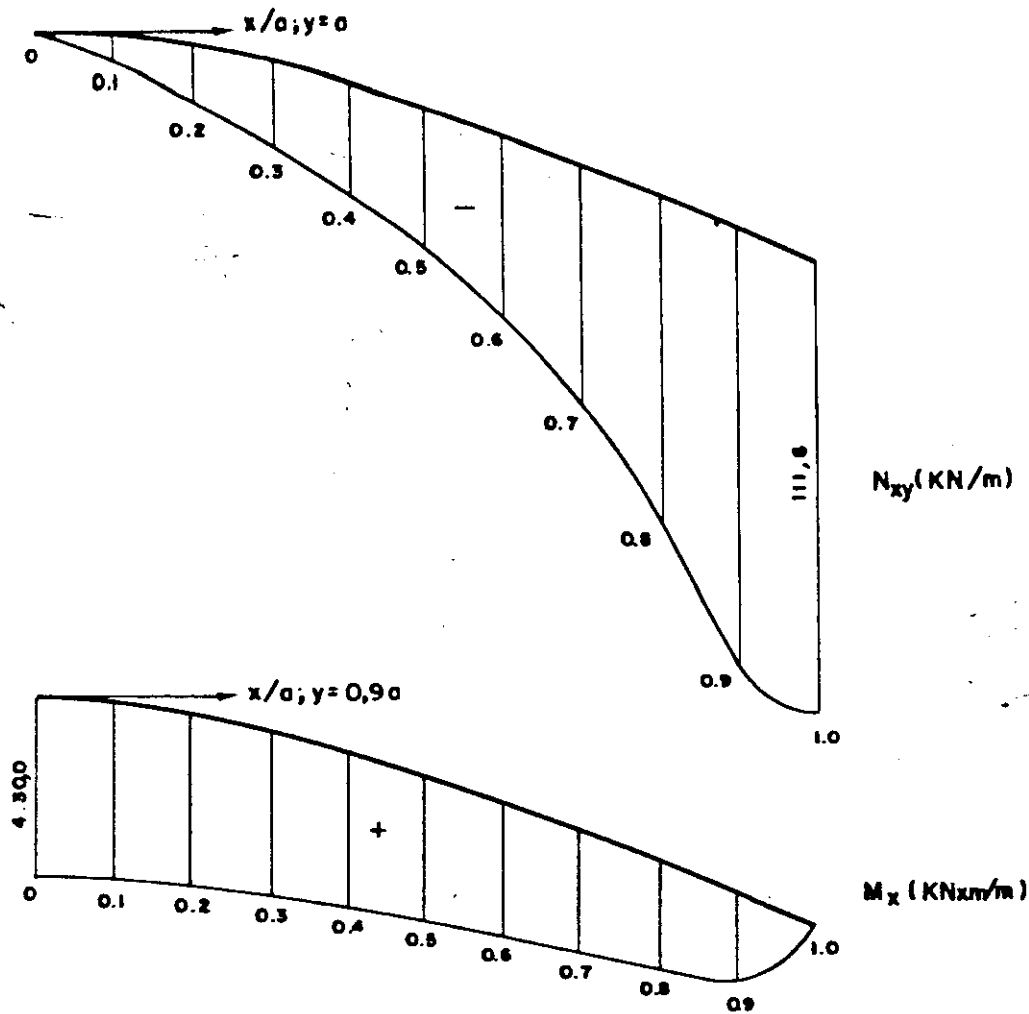
5.3 - Esforços. Verificações estáticas

Os esforços foram calculados de acordo com a teoria de flexão considerando o material de que é feita a cobertura como homogêneo, isotrópico e linearmente elástico e com auxílio do programa em anexo para o computador IBM-1130. Para as expressões em série, determinantes dos esforços e deslocamentos, foram utilizados os sete primeiros termos.

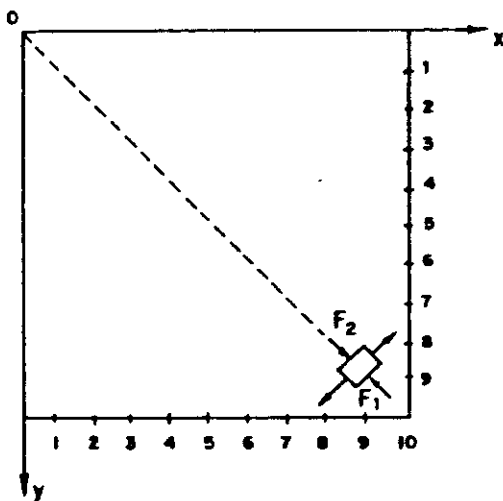
Serão mostrados apenas os esforços importantes para o dimensionamento; vêm-se também as intensidades e direções dos esforços principais, que serão elementos fundamentais na determinação e distribuição das armaduras que foram calculados de acordo com as expressões do item 6.2 (cap. III).

Nas bordas das cascas serão feitas correções considerando de modo aproximado a influência da interação daquela com os apoios; essas correções visam, principalmente, reduzir a armadura na região dos cantos, o que ocorre pelo decréscimo nessa região, dos esforços cisalhantes e consequentemente dos esforços principais; visa-se também estabelecer com melhor definição os limites para os quais são necessárias armaduras de flexão.





-esforços importantes para o dimensionamento



x, y (m)	4	5	6	7	8	9	10
4	-22,5 135°						
5	-19,3 120°	-15,4 135°					
6	-15,4 110°	-12,0 127°	-8,1 135°				
7	-10,5 97°	-7,0 110°	-2,7 123°	+3,2 135°			
8	-4,5 113°	-0,3 119°	+5,0 124°	+12,9 126°	+26,3 135°		
9	+5,3 116°	+11,5 121°	+19,6 125°	+31,3 129°	+49,0 133°	+74,3 135°	
10	+26,0 135°	+34,4 135°	+45,2 135°	+59,7 135°	+79,1 135°	+100,5 135°	+111,6 135°

- esforços principais de tração e suas direções com ox

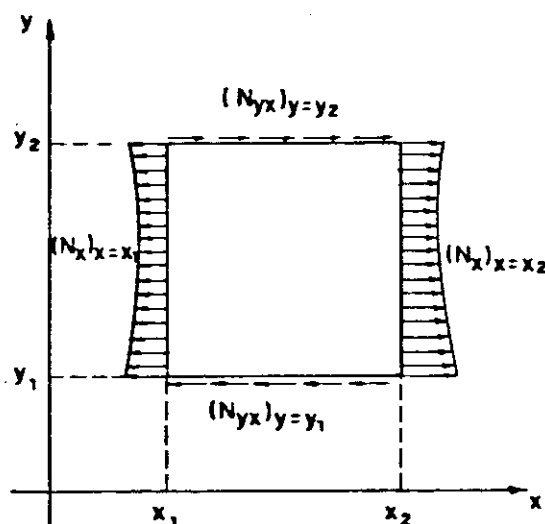
5.3.1 - Verificações estáticas

As verificações que se seguem, obedecendo ao item 19.2.1 do ACI-318/77, tem por finalidade comprovar a eficiência e convergência do processo de desenvolvimento da teoria de cálculo; observe-se que são condições necessárias mas não suficientes para que o cálculo feito esteja correto. Serão feitas duas verificações básicas: o equilíbrio entre as ações normais à superfície média e o equilíbrio entre as ações verticais.

a) Equilíbrio entre ações horizontais

Na ausência de outros carregamentos que não sejam os verticais, deve-se verificar, em qualquer seção limitada por (x_1, y_1) ; (x_1, y_2) ; (x_2, y_1) e (x_2, y_2) , a condição:

$$\int_{y_1}^{y_2} \left[(N_x)_{x=x_1} - (N_x)_{x=x_2} dy \right] + \int_{x_1}^{x_2} \left[(N_{yx})_{y=y_1} - (N_{yx})_{y=y_2} \right] dx = 0$$



- equilíbrio entre as ações horizontais

A identidade anterior, se desenvolvida, é verificada conforme imposto pela primeira das equações E (cap. III). Para ser mostrado esse equilíbrio a partir dos resultados do cálculo, a integral será substituída por uma somatória e equivalente. Se for imposto como limites para integração os pontos (0,0); (0,b); (a,0) e (a,b), tem-se:

$$\int_0^b (N_x)_{x=0} dy - \int_0^a (N_{yx})_{y=b} dx = 0$$

ou fazendo,

$$\int_0^b (N_x)_{x=0} dy = \sum_{i=0}^b (N_x)_i \Delta y_i$$

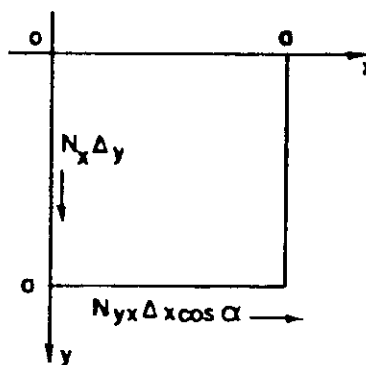
e

$$\int_0^a (N_{yx})_{y=b} dx = \sum_{j=0}^a (N_{xy})_j \Delta x_j \cos \alpha_j$$

com α_j sendo a inclinação da tangente à superfície média em cada ponto ao longo do eixo x.

$\Delta x = \Delta y (m)$	$\cos \alpha$	$N_x \Delta y (kN)$	$N_{yx} \Delta x \cos \alpha (kN)$
0,50	1,000	-17,9	0,0
1,00	1,000	-35,8	-6,0
1,00	0,998	-36,9	-12,0
1,00	0,996	-38,8	-18,7
1,00	0,993	-41,4	-26,0
1,00	0,989	-45,3	-34,5
1,00	0,984	-54,1	-54,3
1,00	0,979	-58,4	-59,6
1,00	0,972	-61,7	-79,0
1,00	0,965	-66,5	-101,0
0,50	0,958	0,00	-55,8

$$\Sigma = -453,8kN \quad \Sigma = -437,7kN$$



Pela somatória de $N_{xy} \Delta y$ e $N_{yx} \Delta x \cos \alpha$, verifica-se a igualdade procurada, a pequena diferença deve-se a aproximações e a problemas de convergência.

Caso o apoio fosse um arco bi-articulado e fosse desprezado o efeito de suas deformações motivadas pelo peso próprio, o empuxo atuante nas extremidades teria como valor uma das somatórias acima.

b) Equilíbrio entre as ações verticais

O carregamento, integrado na superfície, deve estar equilibrado nos apoios pelos componentes verticais dos esforços de borda. No caso, nas bordas, pelas características dos apoios existem tão somente os esforços N_{xy} e V^* que interessam a essa verificação, deve-se ter

$$qA = 4 \int_0^b (N_{xy}) \sin \beta \, dy + 4 \int_0^a (N_{xy}) \sin \alpha \, dx + \\ + 4 \int_0^a V_y^* \, dx + 4 \int_0^b V_x^* \, dy$$

onde $A = 2a \times 2b$; α e β são as inclinações da tangente à superfície média segundo, respectivamente, as direções x e y .

Para $a = b$; $A = 4a^2$; $\alpha = \beta$, $dx = dy$, a expressão acima fica:

$$4qA^2 = 8 \int_0^a (N_{xy}) \sin \alpha \, dy + 8 \int_0^a V_y^* \, dx$$

ou fazendo

$$\int_0^a (N_{xy}) \sin \alpha \, dy = \sum_{i=0}^a (N_{xy})_i \sin \alpha_i \Delta y$$

e

$$\int_0^a V_y^* \, dx = \sum_{j=0}^b (V_y^*)_j \Delta x$$

O equilíbrio é mostrado no quadro abaixo.

Δx (m)	$\sin \alpha$	$N_{xy} \sin \alpha \Delta x$	$V_y^* \Delta x$
0,50	0,000	0,00	-1,40
1,00	0,030	- 0,20	-1,10
1,00	0,060	- 0,70	-1,10
1,00	0,090	- 1,70	-1,40
1,00	0,120	- 3,10	-1,00
1,00	0,148	- 5,10	-1,20
1,00	0,177	- 8,00	-1,40
1,00	0,206	-12,30	-0,80
1,00	0,233	-18,40	-1,60
1,00	0,261	-26,40	-2,50
0,50	0,287	-16,00	0,00

$$8 \left[\sum_0^a (N_{xy} \sin \alpha \Delta y + \sum_0^a V_y^* \Delta x) \right] = -8x(91,9+13,5) = -843,2 \text{ KN e como}$$

$$qA = 2,1 \times 400 = 840 \text{ KN,}$$

verifica-se o equilíbrio vertical.

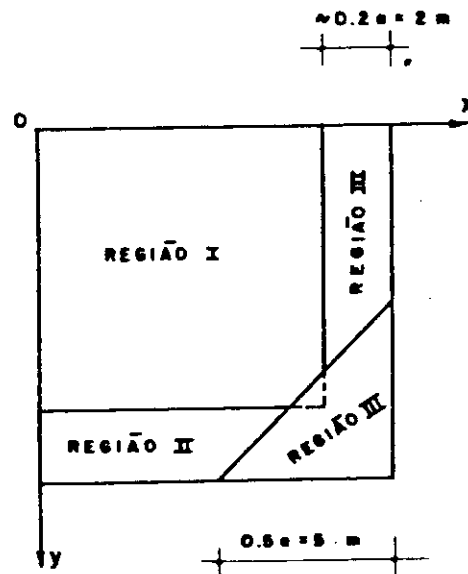


FIG. 18 - Divisão do parabolóide de acordo com as solicitações preponderantes

5.4 - Dimensionamento

Para o dimensionamento, o parabolóide, de acordo com a distribuição das solicitações preponderantes (item 5.3), será dividido em seções (Fig. 18), caracterizando-se a região I por ser inteiramente comprimida, a região II por existirem também flexões de baixos módulos e de amortecimento rápido e a região III por trações (causadas pelos esforços de membrana) inclinadas de aproximadamente 135° com o eixo coordenado ox.

a) Armadura para a região I

A armadura a ser colocada nessa região é simplesmente de distribuição com o fito de amenizar o efeito de eventuais trações causadas por retração, deformação lenta, variação de temperatura e carregamentos temporários não simétricos. Tal armadura é especificada para lajes na NB-1 como sendo $A_{s,min} = 0,90 \text{ cm}^2/\text{m}$, com pelo menos 3 ferros/metro e nas recomendações do ACI Committee 334 seu espaçamento máximo fixado em 5h ou 45cm.

Essas prescrições estarão satisfeitas se for usado 5mm - c 20cm, distribuídos à altura da superfície média.

b) Armadura para a região II

Nessa região de conexão da casca com o apoio, será distribuída armadura de flexão colocada em duas camadas, combatendo os momentos negativos e positivos que aí se desenvolvem.

O maior momento positivo que ocorre, atua a 1m da borda com intensidade de 0,43 NKxm/m; essa seção, que também está submetida ao esforço normal - $N = 6,00 \text{ KN/m}$, será dimensionada à flexo-compressão de acordo com as solicitações:

$$N = 6,00 \text{ KN/m} \quad e \quad M = 0,43 + 6,00 \times \frac{0,065}{2} = 0,63 \text{ KNm/m}$$

Na realidade, a casca se encontra parcialmente engastada no apoio e, sendo assim, os momentos positivos serão ainda minorados e seus máximos estarão mais próximos às bordas, portanto, a armadura suficiente para cobri-los pode prolongar-se de apenas 1,50m das bordas.

Quanto aos momentos negativos, na falta de resultados que representem com melhor justeza as flexões na conexão

xão elástica parabolóide-apoio, será adotado para cálculo das armaduras o momento de engastamento perfeito calculado de acordo como no item 7 (cap.III), o que não irá redundar em gastos significativos de armadura.

$$X_{\max} = -0,2885 R h q \{ 1 - e^{-p(y+a)} \cos p(y+a) + \operatorname{sen} p(y+a) \}$$

$$\therefore X_{\max} \approx 2,5 \text{ KNm/m}$$

Essas solicitações de flexão conduzem a armadura de distribuição em uma camada inferior e outra superior, penetrando cada uma delas 1,50m para o interior do parabolóide.

c) Armadura para a região III

É a região mais crítica em termos de solicitações; para amenizar o efeito das trações que aí ocorrem, existem basicamente três procedimentos: diminuir a curvatura da superfície, tornando-a menos abatida portanto minorando as trações, protender os cantos ou incrementar a espessura da peça nas regiões de mais fortes solicitações. Como os esforços envolvidos não são exagerados para a capacidade de deformação do concreto armado usado ($f_{ck} = 18 \text{ MPa}$), a última das soluções é suficiente.

O espessamento deve ser feito acompanhando a curvatura da superfície e de maneira gradual, procurando-se evitar variações bruscas de seção, que podem causar, como os carregamentos concentrados e os não uniformemente distribuídos, concentração de tensões. Normalmente (ACI Committee 334), a espessura nos apoios deve atingir até duas vezes a espessura na seção central e sua variação deve ser iniciada à distância de, no mínimo, dez vezes a menor espessura. Neste exemplo, adotou-se em todo o contorno espessura de 12cm, com a variação sendo parabólica e iniciando-se à distância, do apoio, de 80cm, onde tem espessura de 6,50cm.

Para a distribuição das armaduras nessa região, e xistem dois posicionamentos básicos:

- a) armadura paralela às direções das trações principais;
- b) armadura em duas direções defasadas de 45° das acima, ou seja, paralela aos arcos de borda, trabalhando-se neste caso, com as projeções dos esforços principais de tração.

Ao se optar por uma disposição ou outra, deve-se pensar que sendo conveniente (inclusive em termos de prê-moldagem) o uso de armaduras em malhas pelas facilidades construtivas e pelo diâmetro dos fios e espaçamentos reduzidos, a segunda opção pode ser a mais viável, sendo que a primeira forma é interessante (recomendada no ACI-318/77) quando atuam esforços consideráveis de tração, com as barras e fios talvez atuando de forma mais eficiente. Neste exemplo, a armadura será dimensionada para ser, no caso da estrutura monolítica, colocada paralela às direções principais e no caso da estrutura prê-moldada, paralela aos arcos de borda.

Para o dimensionamento dessa região tracionada, a peça foi considerada como um tirante de largura 0,70m, solicitado tão somente pelos esforços de membrana, desprezando as flexões, que são reduzidas. A abertura de fissuras, de acordo com o procedimento da NB-1, foi limitada a no máximo 0,1mm, que é o valor recomendado para peças não protegidas em meio agressivo.

Os esforços foram determinados em seções espaçadas de 1m, para o dimensionamento de seções intermediárias trabalhou-se com o valor médio das duas que lhes são adjacentes. O máximo esforço de tração atua nos cantos ($x = \pm a$, $y = \pm b$) e seu valor calculado vale 112,0 KN/m. Considerando a redução proposta em Abu-Sitta (2) esse valor corrigido seria:

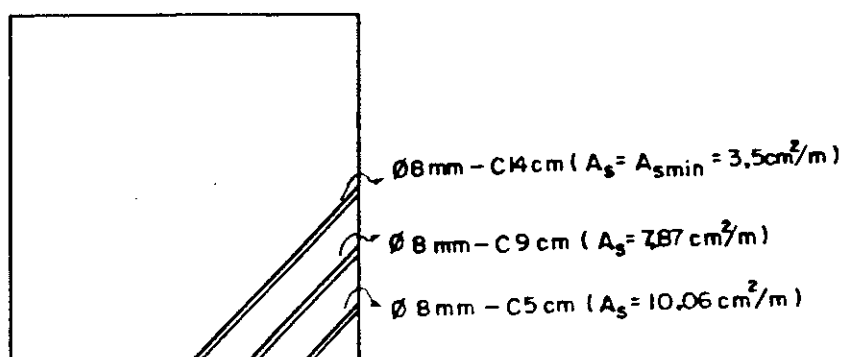
$$F_1 = N_{xy}^* = 20000 \frac{a(1+\nu)}{Eh^2} N_{xy} = .$$

$$= 20000 \cdot \frac{10(1+0,2)}{277 \times 10^5 \times 0,12^2} \times 112 = 67,4 \text{ KN/m}$$

que é substancialmente inferior ao valor inicialmente calculado, mas que também concorda, de modo aproximado, com os experimentos descritos em (9) que indicam ser a diferença entre os valores teóricos e os reais em torno de 30 a 40%.

Como as correções restringer-se exclusivamente às bordas, que de qualquer forma serão bem armadas por serem ligações entre a cobertura e os apoios, será adotado para o dimensionamento das demais seções os valores calculados pela teoria, ou seja, sem considerar as correções.

De acordo com as solicitações e direcionamento destas (item 5.3), com tensão no aço que respeite a condição imposta de abertura de fissuras, o esquema das armaduras é visto abaixo.



-armadura da região III (1/4 do parabolóide)

Deve ser verificado se essas armaduras calculadas satisfazem as condições de norma; no ACI 318/77 é estabelecido que em qualquer parte da região tracionada a armadura

mínima deve ser:

$$A_{s,min} = 0,35 A_c = 0,35 \times 10 = 3,5 \text{ cm}^2/\text{m}$$

adotado 10cm como espessura média da região tracionada.

Quando a tensão no concreto exceder $0,34\phi \sqrt{f_{ck}} = 0,34 \times 1,4 \sqrt{18} = 2,02 \text{ MPa}$ ($20,2 \text{ kgf/cm}^2$), a armadura não será colocada espaçada mais que 3h, ou seja, no caso, de 30cm.

A máxima seção de armadura é especificada para ser limitada por

$$A_s = 18,3h \frac{f_{ck}}{f_y} = 18,3 \times 10 \times \frac{18}{144} = 22,9 \text{ cm}^2/\text{m}$$

ou

$$A_s = 515 \frac{h}{f_y} = 515 \times \frac{10}{144} = 36 \text{ cm}^2/\text{m}$$

Vê-se, portanto, que pelas seções das armaduras e pelo diâmetro dos fios (Fig. 22) essas condições são satisfeitas.

Em termos de economia de armadura e concreto o parabolóide constitui-se, como pode ser notado, numa boa opção para coberturas, pois cobre uma área de 400 m^2 com consumo aproximadamente de 3 kgf de aço/m^2 e com espessura de praticamente 6,50 cm em toda a superfície.

5.5 - Parabolóide pré-moldado

Se o parabolóide for constituído de peças pré-moldadas, o procedimento para obtenção dos esforços em cada seção é o mesmo feito anteriormente, acrescentando-se agora as verificações de esforços adicionais que acaso surjam durante o transporte e os problemas de juntas.

No caso de utilização de elementos planos de dimensões e peso compatível com o transporte manual ou com auxílio de equipamento leve, as verificações de solicitações

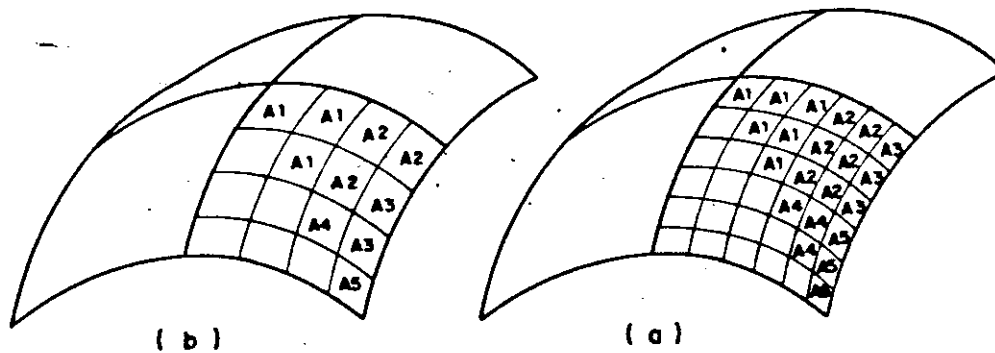
advindas de movimentos e de sobrecargas temporárias geralmente não se fazem necessárias pelas próprias características de dimensões especificadas para esses elementos e os cuidados então restringem-se aos locais de juntas. É evidente que muitas vezes pelas dimensões das peças ocorrerão nestas, enquanto estiverem sobre o cimbramento, solicitações típicas de placas que podem requerer armadura suplementar à aquela necessária para a seção que irá ocupar na estrutura ou que exijam aumento de espessuras ou de enrijecimento por nervuras. Os detalhes construtivos das juntas que permitam sem maiores alterações a continuidade dos esforços, irão depender da forma das peças, se de maior ou menor espessura e se com ou sem nervuras.

Com essas considerações, resta definir as dimensões das peças para poder-se conhecer as juntas mais solicitadas e assim dimensioná-las de forma conveniente também para as sobrecargas temporárias.

Serão assumidas duas formas básicas para as peças, a primeira delas de concreto armado e sem nervuras e a segunda de elementos planos nervurados e em argamassa. A primeira forma tendo maiores espessuras e portanto maior peso são mais limitadas em relação à segunda e os critérios para definição de formas (retangulares, rômbricas) já foram comentados antes (item 3), acrescentado-se que à medida que as peças tornam-se maiores, o cálculo da estrutura como parabolóide vai progressivamente perdendo a precisão e algumas vezes a validade.

Seguindo os citados critérios de subdivisão da superfície, o parabolóide assumirá uma das formas vistas a diante.

Verifica-se de imediato, que a solução (b) é melhor que a (a) pelo número de peças ou de juntas a serem executadas.



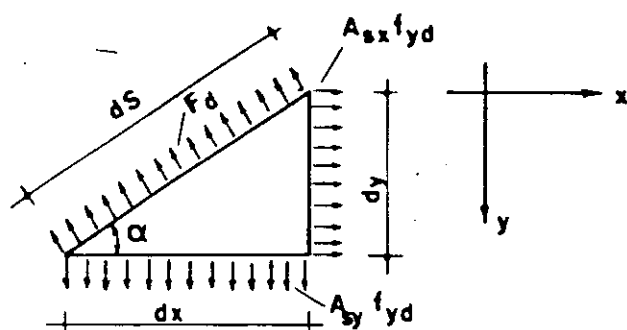
- b) espaçamento em proj. horizontal - 2.50 m a) espaçamento em proj. horizontal - 1.67 m
- 5 peças padrão - 6 peças padrão
- peso médio das peças - 760 kgf - peso médio das peças - 460 kgf

Pelas dimensões das peças e de acordo com o diagrama das solicitações principais vistas no item 3, verifica-se que algumas conexões situam-se ainda na região tracionada, estando solicitadas por esforços cujos máximos são aproximadamente iguais a 87 KN/m e 64 KN/m, respectivamente, para os casos (a) e (b).

Se for adotada a solução (a), as juntas poderão se efetuar através de entalhes feitos na superfície lateral das peças; as características geométricas dos entalhes: comprimento, espaçamento entre elas e profundidade, podem ser fixados obedecendo as condições de resistência especificadas por Baikov (8) e transcritas no item 3. Deve ser notado que, pela necessidade e posicionamento das juntas, a armadura das peças não será paralela às direções das trações principais e sim distribuídas em duas direções paralelas às linhas de juntas.

Para exemplificar, serão mostrados explicitamente os detalhes da ligação (a mais solicitada) entre as peças A6 e A5.

De acordo com o ACI 318/77, a armadura cuja direção não acompanha a das tensões principais, pode ser dimensionada trabalhando-se com as componentes daquelas em cada direção; sendo assim:



$$F_d dS \sin \alpha = A_{sx} f_{yd} dy$$

$$F_d dS \cos \alpha = A_{sy} f_{yd} dx$$

$$\text{sendo } dx = dS \cos \alpha$$

$$dy = dS \sin \alpha$$

$$\text{tem-se } A_{sx} = A_{sy} = A_s = \frac{F_d}{f_{yd}}$$

— armadura em duas direções ortogonais

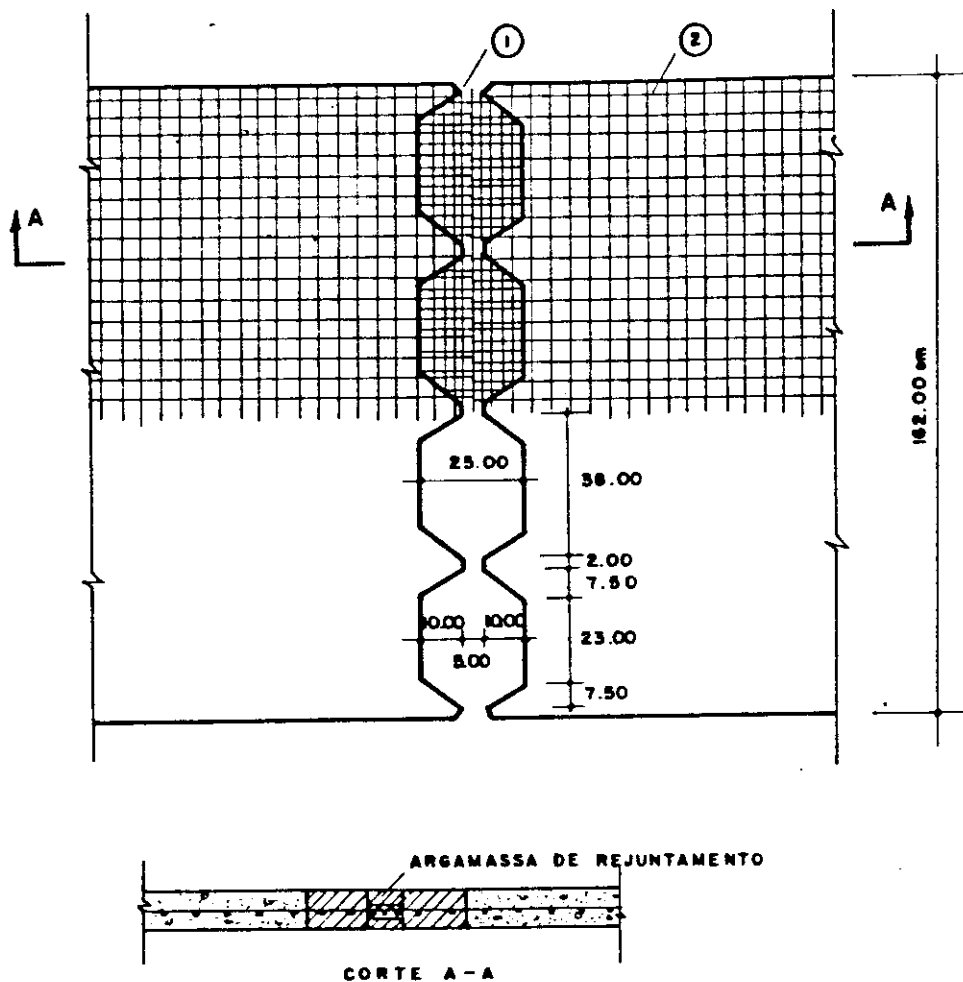
Como em outras seções, a peça A6 estará solicitada por esforços maiores que na junção com as peças A5 e A4, ela será dimensionada para absorver ao maior esforço que ocorre na região que ocupa; se a peça fosse de maiores dimensões, talvez fosse conveniente trabalhar, por economia, com diferentes armaduras em diferentes seções da peça.

No caso,

$$A_{sx} = A_{sy} = \frac{T_d}{f_{yd}} = \frac{1,40 \times 87,0}{14,4 / 1,15} = 9,73 \text{ cm}^2/\text{m}$$

que é satisfeita se for usada armadura em duas malhas quadradas superpostas de 8mm - c10cm.

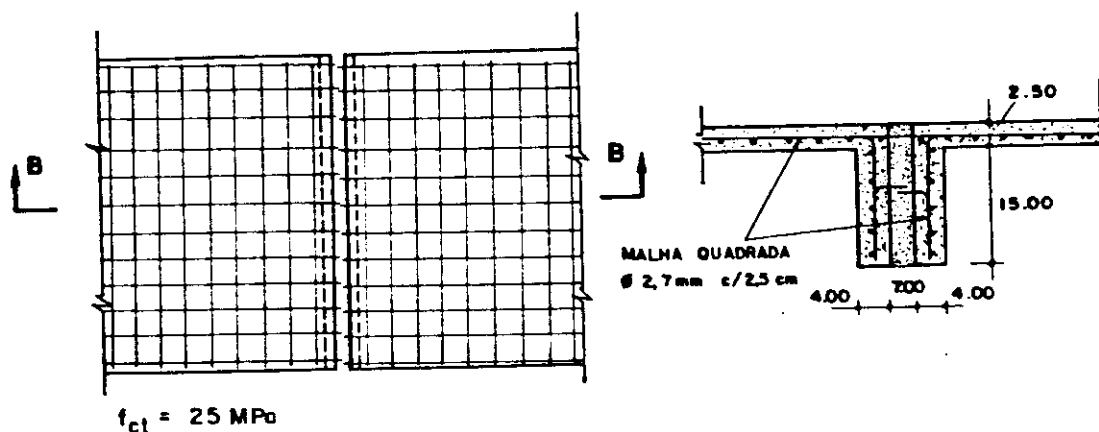
As dimensões das juntas são vistas a seguir, juntamente com o posicionamento da armadura.



- ① - armadura das juntas telas superpostas, com o formato dos entalhes
- ② - armadura das peças
- junta típica entre duas peças pré-moldadas

Nas demais juntas, submetidas a esforços menores, o procedimento a ser feito é o mesmo. Nas regiões comprimidas continua-se com os entalhes para que a superfície tenha a mesma forma em todos os locais.

Se for adotada a solução (b), os problemas com as juntas serão mais amenos que os do caso anterior, inclusive pela capacidade da argamassa armada de apresentar melhor condição de serviço face às solicitações de tração. O dimensionamento é feito de modo semelhante ao caso anterior (ref. 32).



As nervuras têm importância fundamental quando se trabalha com peças delgadas (2 a 4cm), pois facilita e melhora as conexões entre as peças e, além disso, incrementa a rigidez à flambagem da estrutura (agora de reduzida espessura média) e a previne contra eventuais esforços localizados. Numericamente, os efeitos de duas presenças serão mostrados adiante.

Para o cálculo do parabolóide nervurado existe um desenvolvimento encontrável em Apeland (7) pelo qual é possível, com as mesmas condições de contorno assumidas em 5.3.4 (cap.III) para bordas simplesmente apoiadas em tîmpanos rígidos, obter-se resultados teóricos considerando a presença

de nervuras em algumas superfícies de translação (parabolóides elíptico e hiperbólico e cascas cilíndricas com diretriz parabólica). Nesse citado trabalho é formulada teoria geral para o cálculo dessas estruturas com as seguintes características: enrijecidas de forma igual ou diferente (por geometria das nervuras ou por uso de materiais distintos) em duas direções ortogonais, com a espessura formada em camadas de diferentes materiais ou com seção em caixão.

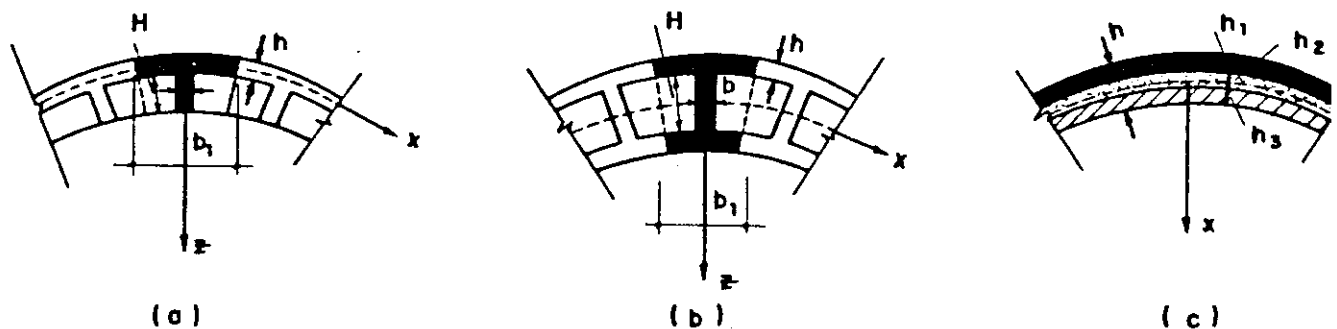


FIG.19 - Seções típicas a - nervurada;
b - em "caixote"
c - em camadas de materiais distintos

A teoria sucinta de cálculo é exposta a seguir: adotando-se rigidezes equivalentes segundo as direções x e y , são estabelecidas as equações de equilíbrio e as relações tensões-deformações, chegando-se a uma equação diferencial em termos de uma função - ϕ - generalizada que condensa os efeitos de membrana e flexão; essa equação (vista abaixo) para estruturas feitas de material homogêneo e isotrópico ou considerado como, e de espessura constante, recai nas já conhecidas 1 ou 2 (item 5.3, cap. III).

$$\phi_{mm} = \left\{ \left(\lambda^4 + T_3 \lambda^2 \eta^2 + \frac{C_2}{C_1} \eta^4 \right) \left[\left(1 - \frac{S_1^2 T_1 v}{D_1} \right) \lambda^4 + \right. \right. \\ \left. \left. + 2 \frac{D_{1v} + 2D_{12}}{D_1} + 2 \frac{S_1 S_2 T_1}{C_2 D_1} \lambda^2 \eta^2 + \frac{D_2}{D_1} \right] - \right.$$

$$+ \frac{S_2^2 T_{2v}}{D_1} \eta^4 \Big] + \frac{1}{D_1 T_{2v}} \left[-K_2 \lambda^2 - K_1 \eta^2 - \frac{S_1 T_1}{C_2} \left(\lambda^4 - \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{S_1 C_2 + S_2 C_1}{C_{1v} S_1} \lambda^2 \eta^2 + \frac{S_2}{S_1} \eta^4 \right) \right] \Big] \frac{q}{D_1}^{-1}$$

Os coeficientes podem ser obtidos em Apeland. A partir daí, a equação em ϕ_{mm} é integrada com auxílio de séries trigonométricas duplas, determina-se F e w e com eles os esforços e deslocamentos procurados.

No caso mais comum de serem as nervuras iguais nas direções x e y e igualmente espaçadas, verificou-se que o cálculo dos esforços e deslocamentos mostra-se bastante satisfatório quando a estrutura é calculada como tendo espessura fictícia constante - h_f - e um módulo de deformabilidade - E_f -, estabelecidos a partir das equações de Vlasov (item 4.2, cap. III), com a condição de permanecerem iguais as rigidezes axial e de flexão da estrutura nervurada e a fictícia, assumida de espessura constante.

Do capítulo III (item 5.3), tem-se a equação:

$$(1) \quad D \nabla^4 \nabla^4 w + E h \nabla_r^2 \nabla_r^2 F = - \nabla^4 q \quad \text{ou}$$

$$\nabla^4 \nabla^4 w + \frac{E h}{D} \nabla_r^2 \nabla_r^2 F = - \frac{1}{D} \nabla^4 q$$

Sejam D^* e K^* as rigidezes respectivas de flexão e axial da estrutura nervurada. Para a determinação de h_f e E_f deve-se impor as igualdades $K^* = E h$ e $D^* = D$, que podem ser relacionados como

$$\frac{E_f h_f}{D} = \frac{E h^*}{D^*} \quad \text{ou}$$

$$\frac{E_f h_f}{\frac{E h_f}{12}} = \frac{E h^*}{D^*} \quad \therefore \quad h_f = \sqrt{12 \frac{D^*}{E h^*}} = \sqrt{12 \frac{D^*}{K^*}}$$

com $K = Eh^*$; e, como $E_f h_f = Eh^* \therefore E_f = \frac{h^*}{h_f} E$

As rigidezes D^* e K^* , são obtidas como abaixo:

$$D^* = E \int_{-h/2}^{+h/2} z^2 dz + E \int_{h/2}^{H+h/2} \frac{b}{b_1} z^2 dz$$

$$K^* = E \int_{-h/2}^{+h/2} dz + E \int_{h/2}^{H+h/2} \frac{b}{b_1} dz$$

ou

$$D^* = 2E \int_{H/2}^{h/2+h} z^2 dz + 2E \int_0^{H/2} \frac{b}{b_1} z^2 dz$$

$$K^* = 2E \int_{H/2}^{H/2+h} dz + 2E \int_0^{H/2} \frac{b}{b_1} dz$$

Conhecendo D^* e K^* , o cálculo dos esforços e deslocamentos é feito normalmente como o visto no capítulo III. Com essa maneira de proceder ocorre de se estar desprezando, no caso de estruturas com seção transversal do tipo da fig. 24.a, a assimetria da seção, o que conduz, como verificado por comparação com os resultados da teoria geral de Apeland, a diferenças muito pequenas; tem-se portanto que é válido calcular a estrutura nervurada de acordo como o processo simplificado exposto, o que irá poupar tempo de cálculo e apresentar mais rápida convergência nas séries. É importante notar que mesmo em Apeland (7) a estrutura é calculada sem considerar as solicitações localizadas nas regiões da peça onde existem nervuras; cremos entretanto que este não é um problema grave a tal ponto de provocar alterações sensíveis nas solicitações internas e como é um efeito localizado, estará implicitamente combatido pois sempre existirá entre a superfície do elemento pré-moldado e a nervura uma

densidade de armadura maior que em outras seções da peça.

A carga crítica de flambagem pode ser avaliada usando a mesma expressão vista no item 9 (cap. III), trocando-se h e E , respectivamente, por h_f e E_f . Por exemplo, no caso da estrutura nervurada como visto na Fig. 24.a, com $h = 0,025m$; $H = 0,15m$; $b = 0,15m$; $b_1 = 0,98m$, q_{cr} será:

$$q_{cr} = 0,10 E_f \left(\frac{h_f}{R} \right)^2 ;$$

sendo:

$$h_f = 12 \frac{D^*}{K^*} \quad e \quad E_f = \frac{h^*}{h_f} E$$

$$D^* = E \int_{-h/2}^{+h/2} z^2 dz + E \int_{h/2}^{H+h/2} \frac{b}{b_1} z^2 dz$$

$$D^* = E \int_{-0,0125}^{+0,0125} z^2 dz + E \int_{+0,0125}^{+0,1625} \frac{0,15}{0,98} z^2 dz =$$

$$= 2,20131 \times 10^{-4} E$$

$$K^* = E \int_{h/2}^{+h/2} dz + E \int_{h/2}^{H+h/2} \frac{b}{b_1} dz \quad \therefore$$

$$K^* = E \int_{-0,0125}^{+0,0125} dz + E \int_{+0,0125}^{+0,1625} \frac{0,15}{0,98} dz = 0,048 E$$

$$\therefore h_f = 0,235 ; E_f = \frac{0,048}{0,235} \times 277 \times 10^5 =$$

$$= 5.657.900 \text{ KN/m}^2$$

tomando-se

$$E = 277 \times 10^5 \text{ KN/m}^2$$

$$\therefore q_{cr} = 28,1 \text{ KN/m}^2,$$

o qual estabelece um coeficiente de segurança:

$$\gamma_f = \frac{q_{cr}}{q} = \frac{28,1}{1,7} = 16 \quad (q = 0,048 \times 25 + 0,5),$$

bastante superior ao do caso da peça sem nervuras.

Se a solução adotada para o parabolóide pré-moldado for a com elementos curvos, as dimensões destes podem ser maiores que no caso de peças planas, por ser a superfície final efetivamente um parabolóide e não uma com geometria mais ou menos próxima dependente da discretização feita na superfície.

Adotaram-se para cobrir a mesma área de 20 x 20m, elementos curvos como os vistos abaixo, estando as linhas de

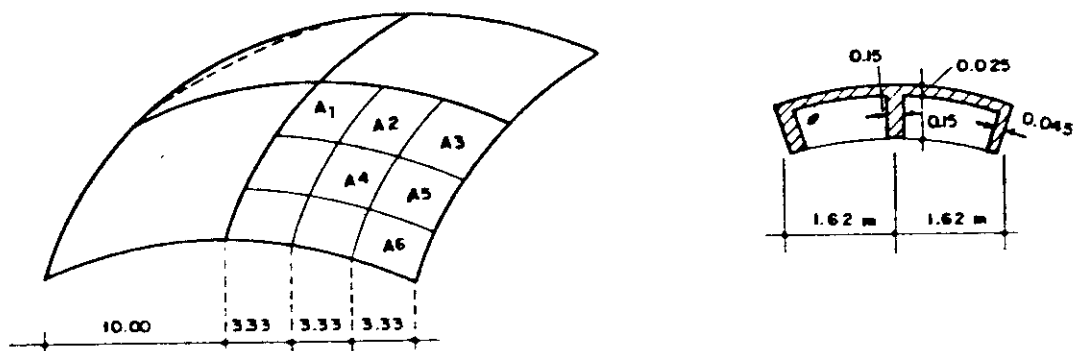


FIG. 20 - a - subdivisão da superfície

b - seção transversal típica das peças curvas -

espessura - 0.025 m

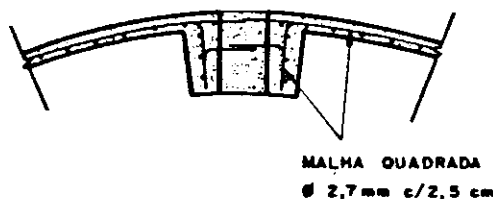
nervura - b x H { 0.15 x 0.15 (nervuras internas)

{ 0.045 x 0.15 (nervuras no contorno)

espaçamento das nervuras - 1.62 m

juntas espaçadas, em planta, de 3,33m, sendo necessários para a formação da superfície do parabolóide 36 peças com 6 tipos diferentes, obtendo-se a cobertura curva, a qual não se verificava exatamente nas soluções anteriores.

Com essas dimensões e espaçamento das nervuras, não existe problema de estabilidade e as juntas estão quase que inteiramente comprimidas à exceção das juntas entre as peças A6 e as A5, que próximas às bordas estão solicitadas por trações de 30 KN/m, que podem ser absorvidas com armaduras como abaixo.



Tratando-se de peças maiores, deve-se verificar em cada peça os esforços de peso próprio quando do transporte para, se for o caso, colocar armadura extra. Como cada peça em separado terá uma pequena relação flecha/raio de curvatura, foi calculada simplesmente como uma laje, verificando-se que a menor armadura necessária para o parabolóide ($0,90 \text{ cm}^2/\text{m}$ na região I) é suficiente para conter as cita das solicitações, não sendo necessárias portanto armaduras adicionais.

5.6 - Cálculo e dimensionamento do arco de borda

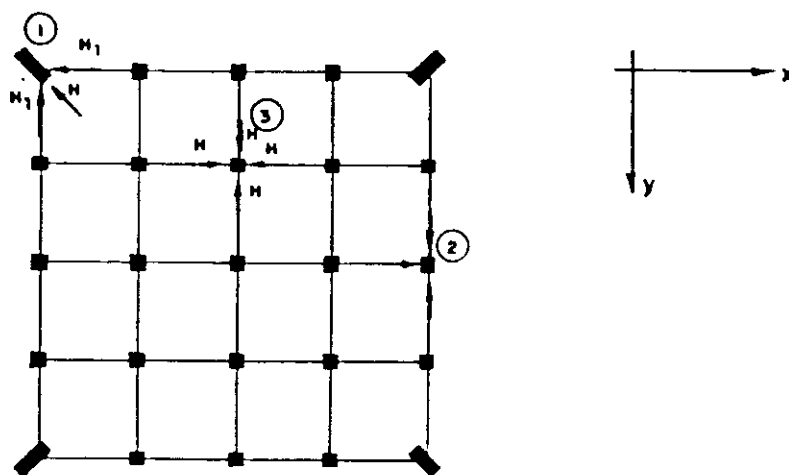
A função do apoio é a de manter a geometria da casca, evitando deformações excessivas e regularizando tensões, para isso é necessário que apresente dimensões e vinculações que lhe assegurem rigidez suficiente às solicita

ções oriundas da casca e de seu peso próprio. Segundo Abu-Sitta (2), a altura do elemento de apoio (arco articulado), deve-se situar no mínimo entre 2,5% e 7,5% do vão total, sendo que para alturas menores esses apoios não terão comportamento estrutural satisfatório.

O cálculo das solicitações internas no apoio será feito considerando as ações do parabolóide a partir dos resultados obtidos da teoria de flexão, fazendo-se pequenas correções, conforme visto no capítulo anterior (item 7). Possivelmente, tal procedimento conduzirá a pequenos erros na distribuição dos esforços da casca para o apoio, pois estar-se-á desprezando a real interação entre eles. Essa interação estará um tanto representada se for definida uma região da casca que trabalhe em conjunto com o apoio, pois desde que este tenha rigidez que permita em suas adjacências os giros da casca, existirá parte desta que funciona como mesa de compressão tal como nas conexões vigas-lajes. A largura dessa faixa colaborante é fixada no Manual 31 ASCE(18) para cascas cilíndricas múltiplas e isoladas como sendo respectivamente $0,78\sqrt{Rh}$ e $0,36\sqrt{Rh}$, medidos a partir das bordas, para as cascas de dupla curvatura esses valores servem como referência; caso a casca esteja apoiada na linha que contenha o C.G. do apoio a faixa colaborante não é considerada.

A forma de apoio (se tîmpano, arco atirantado ou não, viga curva contínua, quadro curvo, etc.) irá depender da finalidade da construção e de suas dimensões. Por motivos estáticos e também por facilidade construtiva, a solução ideal é a do parabolóide apoiado num quadro composto de vigas curvas associadas a pilares de canto; verificou-se que o principal obstáculo a esse esquema estático é que, permitindo deslocamentos laterais dos pilares, não se aproveita quase nada da curvatura da viga, que por sua vez estará fortemente solicitada por trações, principalmente na seção central; essa solução de quadro curvo mostrou-se interessante até vãos da ordem de 12m.

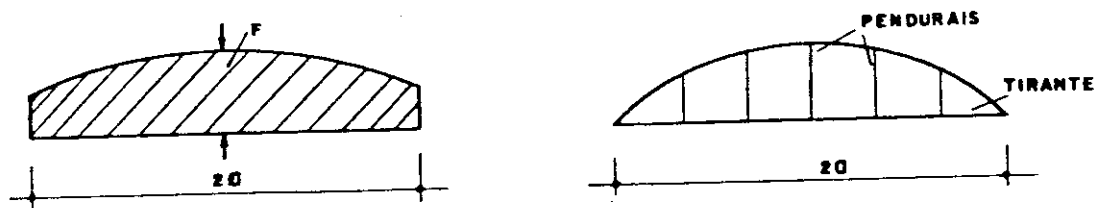
À medida que se procura evitar os deslocamentos laterais por enrijecimento dos pilares de canto, a tendência é chegar a um limite que é o arco bi-engastado, que estará satisfatoriamente representado quando os pilares assumirem dimensões que se possa considerá-los rígidos aos empuxos a que estarão submetidos. Em uma associação de vários parabolóides iguais, a preocupação quanto aos deslocamentos laterais se restringe aos pilares externos, isto porque nos demais as ações horizontais sobre eles se auto-equilibrarão como visto abaixo.



- Pilares do tipo ① - necessidade de maior enrijecimento segundo a diagonal do sistema de parabolóides
- Pilares do tipo ② - possível enrijecimento segundo x ou y
- Pilares do tipo ③ - auto equilibrados horizontalmente, teóricamente submetidos às cargas verticais

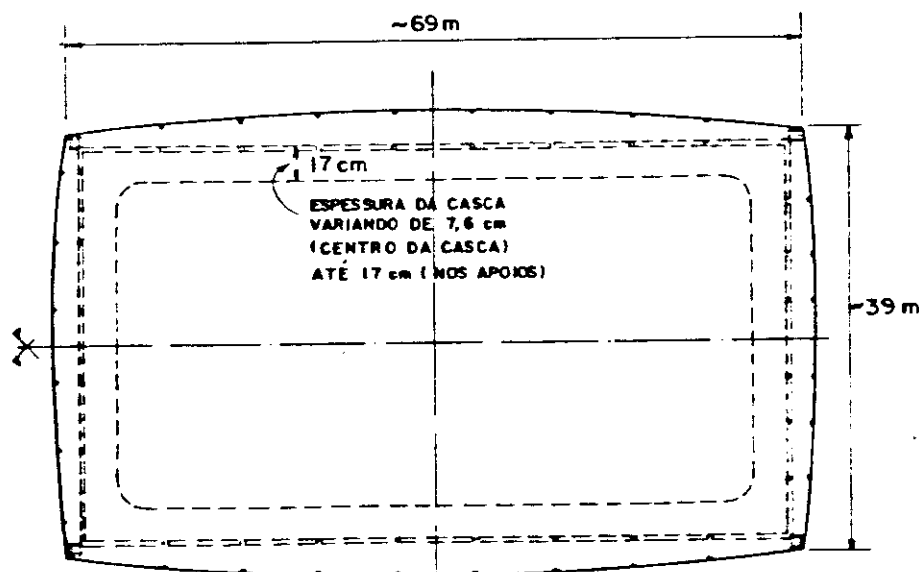
A solução do apoio com um arco bi-engastado é das melhores que se apresenta até quando os vãos se situam em torno de 20m, inclusive por deixar o vão completamente desimpedido em quase a totalidade de sua altura (altura do pilar + flecha do arco). Foi observado neste exemplo que devido às componentes horizontais do carregamento, as solicitações interna no arco praticamente não diferem, sejam as extremidades do arco articuladas ou engastadas e como esta última opção é de maior facilidade construtiva, é a mais indicada.

Para vãos acima de 20m, surge cada vez mais a necessidade, principalmente para aliviar um pouco os empuxos nos pilares é também para que o arco não apresente deformações verticais significativas, de aumentar a altura do arco, o que pode levar a um tampo de seção cheia (viga curva de altura variável) ou vazada (arco atirantado e com pendurais), com esta última forma apresentando melhores condições de iluminação e ventilação interior e de serviço para os pilares.

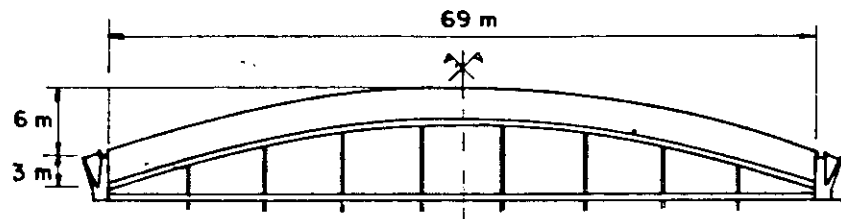


(a) - apoio em viga curva com seção cheia
(b) - apoio em viga curva com seção vazada

Quando os vãos atingem dimensões maiores, o apoio somente se mostrará suficiente quando existirem também pilares intermediários aos de canto ou for submetido a uma pré-compressão. Para dar noção de grandeza, tem-se por exemplo a cobertura do Smithfield Poultry Market (USA) cujas características geométricas são vistas abaixo.



a) Planta da cobertura

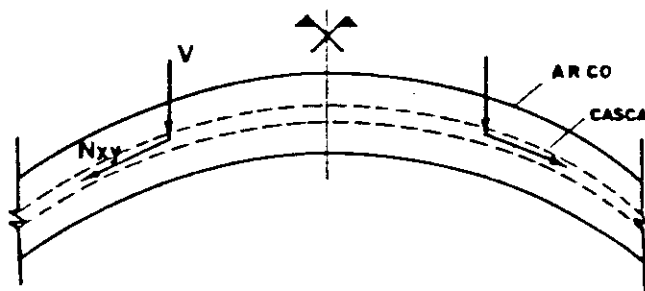


b) Seção na linha central da cobertura

Neste caso, para que o apoio tivesse boas condições de comportamento, a viga foi feita contínua, disposta em diversos pilares, e protendida. É interessante comentar que neste caso específico não havia problema de trânsito por entre os vãos, o que pode não ocorrer em outras situações.

Para finalizar este breve comentário, queremos dizer que talvez a melhor solução para os apoios e também para a estrutura em geral, é trabalhar com vãos médios (10 a 20m) e caso necessário vãos maiores fazer uma associação de vários painéis com dimensões que se situem nessa faixa.

Voltando ao problema específico, que é o de exemplificar o cálculo de um apoio para a cobertura analisada, tem-se que os esforços oriundos do parabolóide são predominantemente de cisalhamento, como já visto; para simplificar os cálculos, será considerado que essas ações descarregam-se à altura da linha média do sistema de apoio (caso fosse outra a situação, deveria se considerar, pelas excentricidades das cargas, momentos longitudinais e laterais distribuídos ao longo do apoio), e serão concentradas em faixas de largura unitária (em projeção) e decompostas em componentes horizontais e verticais.



- transmissão dos esforços do parabolóide para o apoio

Com essas simplificações e com os esforços vistos em 5.3, tem-se as ações atuantes sobre o arco.

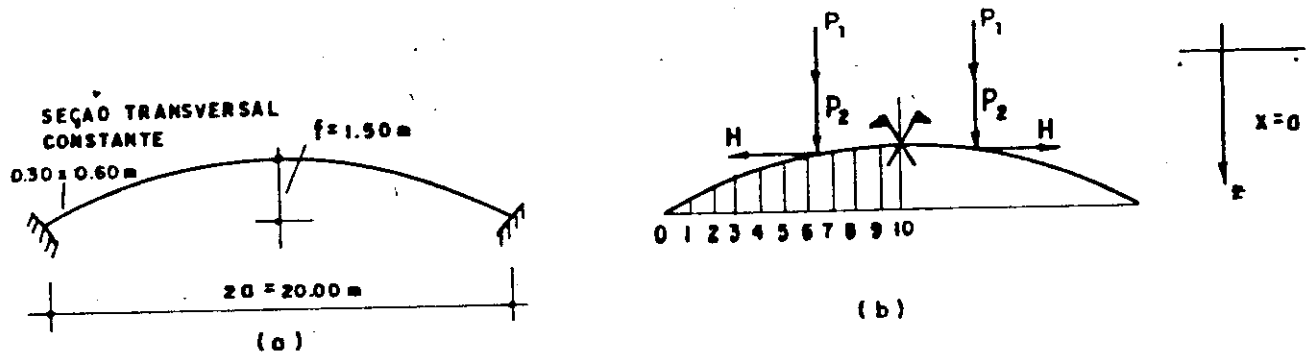


FIG. 23 - (a) Geometria do arco de apoio

(b) Esforços atuantes sobre o arco:

- P_1 - esforço cortante V_y concentrado numa faixa Δy
- P_2 - comp. vertical do esforço de cisalh. N_{xy} conce numa faixa Δy
- H - comp. horizontal " " " " " "

Ações sobre o arco

Seção	Δy (m)	$H = N_{xy} \cos \alpha \Delta y$ (kN)	$P = (N_{xy} \sin \alpha + V_y) \Delta y$ (kN)
0	0,50	50,9	15,9
1	1,00	97,5	28,9
2	1,00	76,8	20,0
3	1,00	58,3	13,1
4	1,00	44,6	9,4
5	1,00	33,9	6,3
6	1,00	25,8	4,1
7	1,00	18,6	3,1
8	1,00	12,0	1,8
9	1,00	6,0	1,3
10	0,50	1,5	0,6

* para o cálculo do arco tomou-se:

$$N_{xy(0)}^* = \frac{N_{xy(0)} + N_{xy(1)}}{2} \quad e$$

$$N_{xy(10)}^* = \frac{N_{xy(10)} + N_{xy(9)}}{2}$$

onde os valores sem asteriscos referem-se àqueles mostrados no item 3; os com asterisco são os de cálculo para o arco.

5.6.1 - Cálculo das reações provocadas pelos carregamentos horizontais e verticais sobre o arco

As reações devido às ações H e P foram obtidas utilizando-se as expressões encontráveis em Leontovich (42) para o cálculo de arcos bi-engastados, com o sentido positivo dos hiperestáticos estabelecidos de acordo com a convenção da Fig. 28.

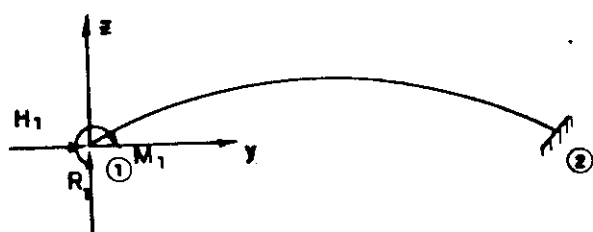


FIG. 24 - Sentido positivo dos hiperstáticos
 H_1 - reação horizontal
 R_1 - reação vertical
 M_1 - momento de engastamento perfeito

Empuxos e momentos provocados pelos carregamentos P e H

SEÇÃO	y (m)	z (m)	P (KN)	H (KN)	H_1 (KN)	M_1 (KN·m)
0	0,000	0,000	15,9	50,9	50,9	0,0
1	1,000	0,285	28,9	97,5	96,4	-6,2
2	2,000	0,540	20,0	76,8	71,3	-0,4
3	3,000	0,765	13,1	58,3	54,3	0,0
4	4,000	0,960	9,4	44,6	42,4	1,1
5	5,000	1,125	6,3	33,9	30,8	1,4
6	6,000	1,260	4,1	25,8	20,8	1,3
7	7,000	1,365	3,1	18,6	16,7	1,4
8	8,000	1,440	1,8	12,0	10,2	1,0
9	9,000	1,485	1,3	6,0	7,2	0,7
10	10,000	1,500	0,6	1,5	1,6	0,1

$$H_1 = + 402,6 \text{ KN}$$

$$M_1 = + 0,4 \text{ KN·m}$$

5.6.2 - Reações provocadas pelo peso próprio do arco.

Reações totais

Sendo $q = 0,30 \times 0,60 \times 25 = 4,5 \text{ KN/m}$ e com auxílio da mesma bibliografia anterior encontrou-se $H = 6,6 \text{ KN}$; $M_1 = 7,5 \text{ KN/m}$ e $V_1 = 45,0 \text{ KN}$.

As reações totais no apoio -1-, serão então:

$$H_1 = 402,6 + 6,6 = 409,2 \text{ KN}$$

$$M_1 = 0,4 - 7,5 = -7,1 \text{ KN/m}$$

$$V_1 = 104,5 + 45,0 = 149,5 \text{ KN}$$

5.6.3 - Esforços nas seções

Os esforços foram calculados em apenas algumas seções, como visto abaixo.

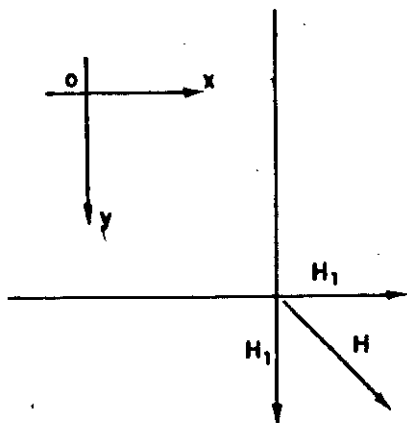
Esforços nas seções

Seção	N (KN) P+H	V(KN) P+H	M(KN.m) P+H	N _g (KN)	V _g (KN)	M _g (KN)	N(KN)	V(KN)	M(KN.m)
0	-362,4	-16,1	+ 0,4	-115,3	+4,6	-15,9	-477,7	-11,5	-15,5
2	-261,0	- 1,2	-16,4	-113,0	+3,7	- 7,3	-374,0	+ 2,5	-23,7
4	-121,9	+ 5,1	-13,2	-111,3	+2,8	- 0,6	-233,2	+ 7,9	-13,8
6	- 41,6	+ 6,0	- 2,9	-110,1	+1,8	+ 4,1	-151,7	+ 7,8	+ 1,2
8	+ 3,6	+ 3,9	+ 6,4	-109,3	+0,9	+ 7,0	-105,7	+ 4,8	+13,4
10	+ 21,8	0,0	+ 9,9	-109,1	0,0	+ 8,0	- 87,3	0,0	+17,9

Antes de passar ao dimensionamento do arco convém verificar a deslocabilidade dos pilares de canto que foram supostos rígidos lateralmente e se caso permitam algum deslocamento, qual o valor deste e sua influência sobre os esforços do parabolóide e no próprio arco.

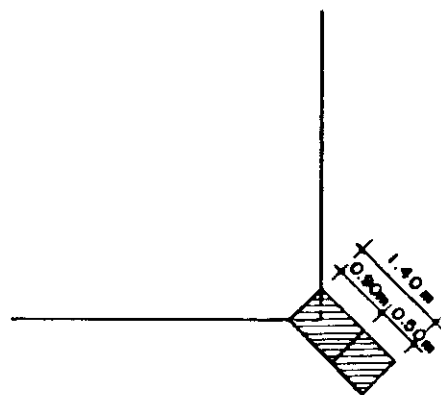
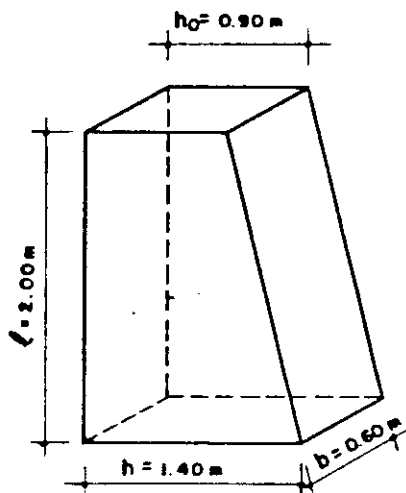
Nos cantos do parabolóide (isolado), os empuxos provenientes do arco atuar sobre os pilares como visto abai

xo, com a resultante atuando segundo a diagonal, formando com o x 45° . Será portanto conveniente que esses pilares tenham maior rigidez na direção que atua a resultante.



- H_1 - empuxo atuante no pilar proveniente das ações sobre o arco
- H - resultante dos empuxos H_1

Se for adotado um pilar com as dimensões e posicionamento mostrado abaixo, o deslocamento na direção da diagonal será dado por:



$$\Delta_E = \frac{12H\sqrt{2}}{bE} \left[\frac{2h_0}{a^3(a\ell + h_0)} - \frac{h_0^2}{2a^3(a\ell + h_0)^2} + \frac{1}{a^3} \ln \left(\frac{a\ell + h_0}{h_0} \right) - \frac{3}{2a^3} \right], \text{ sendo } a = \frac{h - h_0}{\ell}$$

$$\Delta_H = \frac{12 \times 410 \times \sqrt{2}}{0,6 E} \left[\frac{2 \times 0,90}{0,25^3 (0,25 \times 2 + 0,90)} + \frac{0,9^2}{2 \times 0,25^3 (0,25 \times 2 + 0,9)^2} + \frac{1}{0,25^3} \ln \left(\frac{2 \times 0,25 + 0,9}{0,9} \right) + \frac{3}{2 \times 0,25^3} \right]$$

$$\Delta_H = 7,5 \times 10^{-4} \text{ m}$$

Com esses deslocamentos, ainda que bastante reduzidos, surgirão esforços adicionais na cobertura e no apoio. De acordo com as expressões fornecidas por Gioncu e encontradas em Beles-Soare (9) e com as dimensões do arco e do parabolóide, têm-se os seguintes esforços aproximados causados por Δ_H , que deverão ser adicionados aos já calculados.

$$N_x|_{x=y=a} = K_2 E \Delta_H \times 10^{-4} = 9,369 \times 277 \times 10^5 \times 7,5 \times 10^{-8} = 119,5 \text{ KN/m}$$

$$N_x|_{x=0; y=a} = 16,09 \times 277 \times 10^5 \times 10^{-4} = 33,5 \text{ KN/m}$$

$$K_{xy}|_{x=y=a} = -K_3 E \Delta_H \times 10^{-4} = 8,395 \times 277 \times 10^5 \times 7,5 \times 10^{-8} = 17,4 \text{ KN/m}$$

$$H = -K_7 a E \Delta_H \times 10^{-4} = -0,963 \times 10 \times 277 \times 7,5 \times 10^{-8} = 2,0 \text{ KN}$$

$$w|_{x=0; y=a} = K_H \Delta_H = 4,65 \times 7,5 \times 10^{-4} = 3,50 \times 10^{-3} \text{ m}$$

Esses esforços e deslocamentos teóricos adicionais, possivelmente exagerados, pouco influirão no dimensionamento da estrutura. Na seção central do arco, o esforço

nominal será $K = -87,3 + 33,5 = 53,8$ KN, nas demais seções do arco e também no parabolóide como as variações são mínimas, serão desprezados.

Quanto aos giros, os pilares (como verificado) são suficientemente rígidos, satisfazendo plenamente às condições de engastamento perfeito admitida ao início do cálculo; observe-se que essa ausência de giros é favorecida pelas pequenas flexões que ocorrem nos encontros arcos-pilares.

Como foi admitido para o cálculo dos esforços no parabolóide que os elementos de apoio eram rígidos em seus planos, calculou-se, de forma aproximada, a flecha na seção central, a qual, sem consideração das ações ao longo do tempo, verificou-se ser igual a 0,0062m, valor compatível com a hipótese tomada.

5.6.4 - Dimensionamento do arco

O arco é dimensionado no estado limite último de ruptura adotando-se os coeficientes de minoração de resistência dos materiais e de majoração das cargas previstas na NE-1.

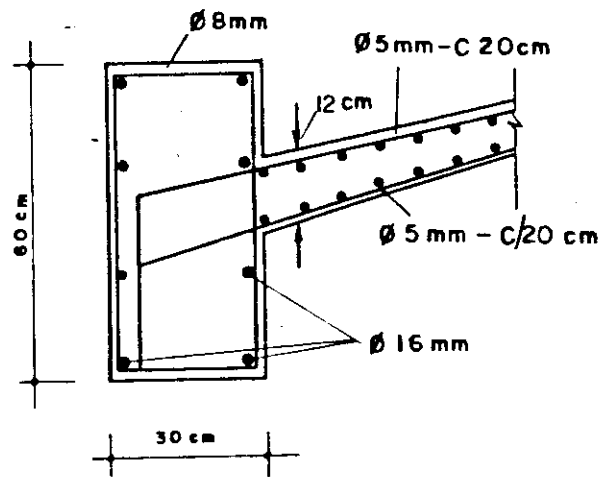
Com os esforços calculados com a correção do esforço normal no meio do vão e fazendo as verificações de Norma, chega-se à conclusão que será suficiente dispor, em todas as seções, de armadura mínima prevista para elementos comprimidos.

$$A_s = 0,008 bh = 0,008 \times 30 \times 60 = 14,40 \text{ cm}^2$$

ou

$$\phi 16\text{mm} \quad c 13,5 \text{ cm}$$

A armadura transversal suficiente na região do apoio será:



(b)

- a - armadura de 1/4 do parabolóide
- b - armadura da conexão arco-parabolóide (seção média do arco)

V - ESTUDO EXPERIMENTAL DAS JUNTAS

1. SITUAÇÃO DO PROBLEMA COM AS JUNTAS

Nos capítulos anteriores já se falou da importância da utilização de peças pré-moldadas na construção de estruturas em casca e, em particular, na construção dos parabolóides elípticos. Entretanto, a pré-moldagem apresenta alguns problemas característicos em termos estruturais e construtivos, sendo o mais relevante, neste caso, os problemas de ligação entre peças, que devem ser eficientes e ainda construtivamente as mais econômicas e simples possíveis, para que não sejam arrefecidas as vantagens proporcionadas pela pré-moldagem.

Felizmente, como se pôde constatar, nos parabolóides preponderam as regiões em que as ligações podem ser simples pela própria natureza do estado de tensão, que se caracteriza por apresentar essencialmente compressões em duas direções ortogonais. Outras regiões há, nas quais a escolha adequada da direção da junta permite utilizar ligações simples, ou ainda, a combinação dos esforços pode simplificar o problema.

Assim, analisada essa estrutura e as opções oferecidas de seccionamento da superfície (em termos de dimensões e tipos de peças), verificou-se ser interessante o estudo da eficiência e do real comportamento de certo tipo de junta idealizada especificamente, ou ainda, necessária tão somente nas regiões de cantos e bordas do parabolóide, mas que podem ser utilizadas nas demais seções com o fito de assegurar boa ligação entre as peças quando eventualmente solicitadas por trações.

Tem-se então, para carregamentos de peso próprio e outros com distribuição semelhante, que os cantos apresentam-se tracionados segundo direções de $\sim 135^\circ$ com o eixo ox (item 6.1.b, cap. III), todavia, a direção das juntas pode convenientemente ser tal que nestas ocorreram cisalhamentos e compressões. É o que mostra a Fig. 1.

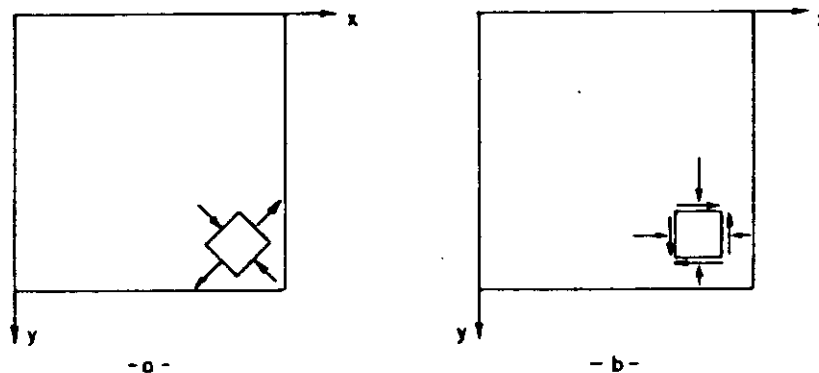


FIG. 1- a) Junta perpendicular à direção das solicitações de tração.
b) Junta defasada das direções principais de tração

Nas condições da junta da Fig. 1.b, se se conseguir juntas construtivamente simples e que tenham bom comportamento quando solicitadas por τ , sem a colaboração da compressão, o problema está resolvido. Foi o que se procurou estudar e que, aparentemente se conseguiu.

Situado o problema, passou-se a analisar o tipo de ligação a ser executada. Inicialmente, pensou-se em juntas como as abaixo, que se revelaram impróprias ou por deficiências estruturais, construtivas ou econômicas.

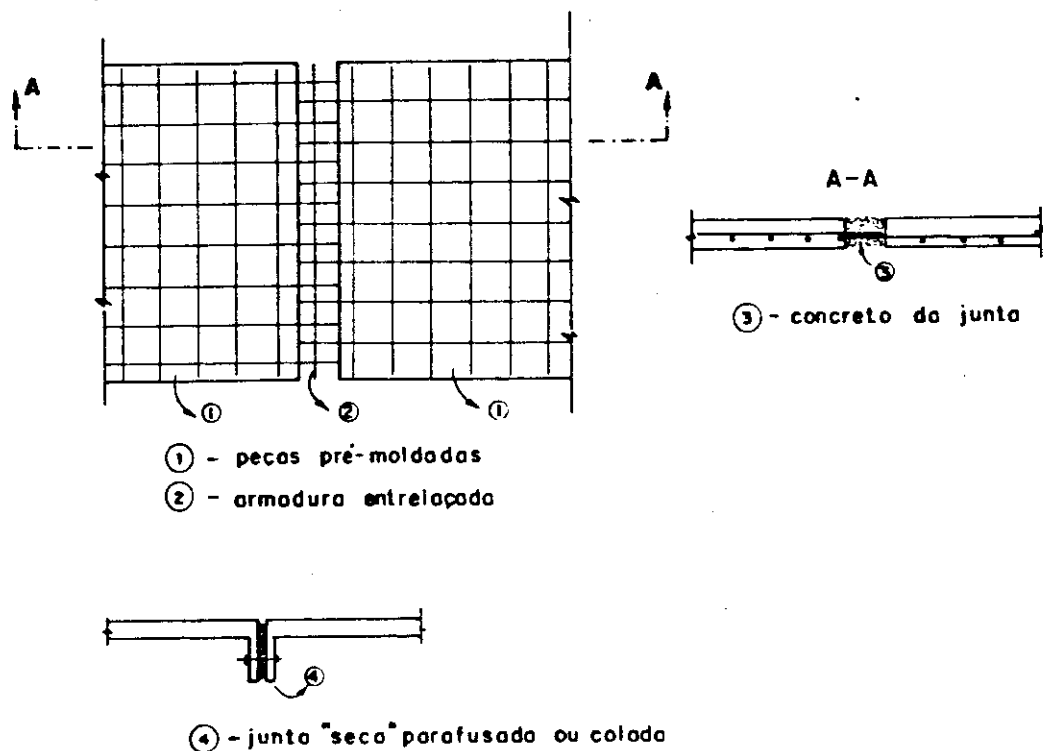


FIG. 2 - Opções de juntas entre peças pré-moldadas

A seguir, imaginou-se juntas "denteadas", com isto se conseguindo desde que as peças sejam providas de entalhas cuja presença tem por finalidade propiciar melhor colaboração do concreto das juntas no combate aos esforços de cisalhamento.

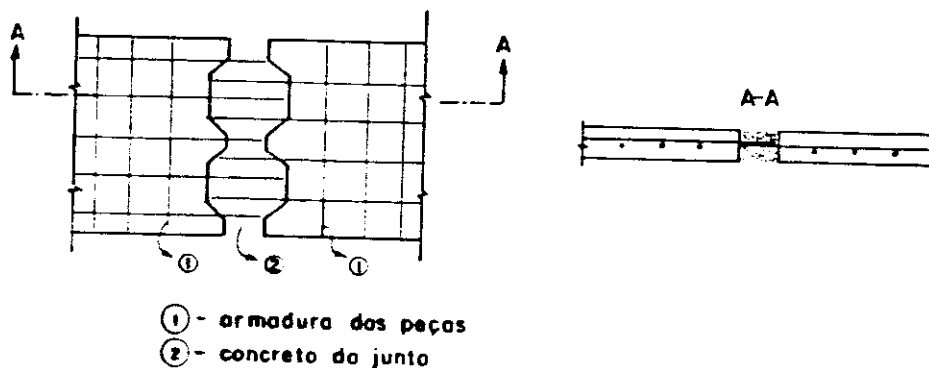
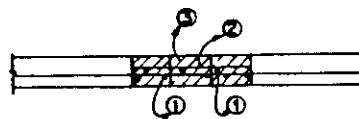
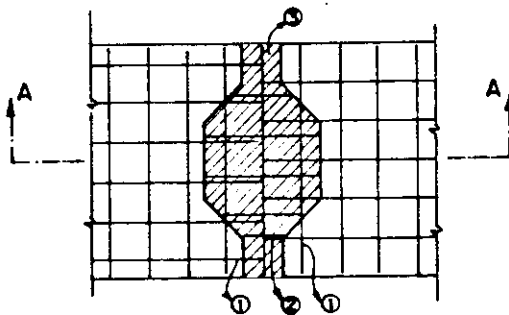


FIG. 3 - Junta com armadura entrelaçada entre peças dotadas de entalhes na superfície lateral.

Assim surgiu a junta como a do tipo da figura anterior, cujo inconveniente, como verificado, foi construtivo, causado pela dificuldade de superposição das telas, fazendo com que, para a acomodação destas, ocorressem mudanças no alinhamento e posicionamento das peças, o que não é interessante. Modificou-se então, com o mesmo tipo de junta, o arranjo das armaduras no seu interior, ao invés de telas superpostas, prolongou-se as armaduras de uma e outra peça até a linha média da junta e a seguir colocou-se sobre estas uma outra com o formato do vazio entre as peças.



- ① - armadura das peças chegando até a linha média das juntas.
- ② - armadura, com formato da junta, superposta às anteriores.
- ③ - concreto de rejuntamento.

Considerou-se esta então como uma ligação que, se tivesse boas condições de resistência às solicitações de cisalhamento, seria viável para a união de peças, em concreto armado (espessura de 5 a 10cm), nas regiões de cantos dos parabolóides.

2. OS ENSAIOS

2.1 - Descrição dos modelos. Dispositivo de ensaio

Os modelos ensaiados, em número de onze, foram construídos em concreto armado com suas dimensões colocadas

MODELO	$\bar{f}_{c28}$ (MPa)	$\bar{f}_{t28}$ (MPa)	A_s (cm ² /m)	$\rho = A_s/A_c$ (%)
M2	34,5	2,8	2,83	2,87
M3	39,5	3,0	2,83	2,87
M4	39,5	3,0	2,83	2,87
M5	38,8	3,1	2,83	2,87
M6	38,8	3,1	2,83	2,87
M7	33,1	2,8	1,41	1,43
M8	33,1	2,8	1,41	1,43
M9	33,9	2,9	1,41	1,43
M10	33,9	2,9	1,15	1,16
M11	34,0	3,1	1,15	1,16
M12	34,0	3,1	1,15	1,16

QUADRO 1 - Características do modelo

OBS.: as resistências médias referem-se ao concreto das juntas;

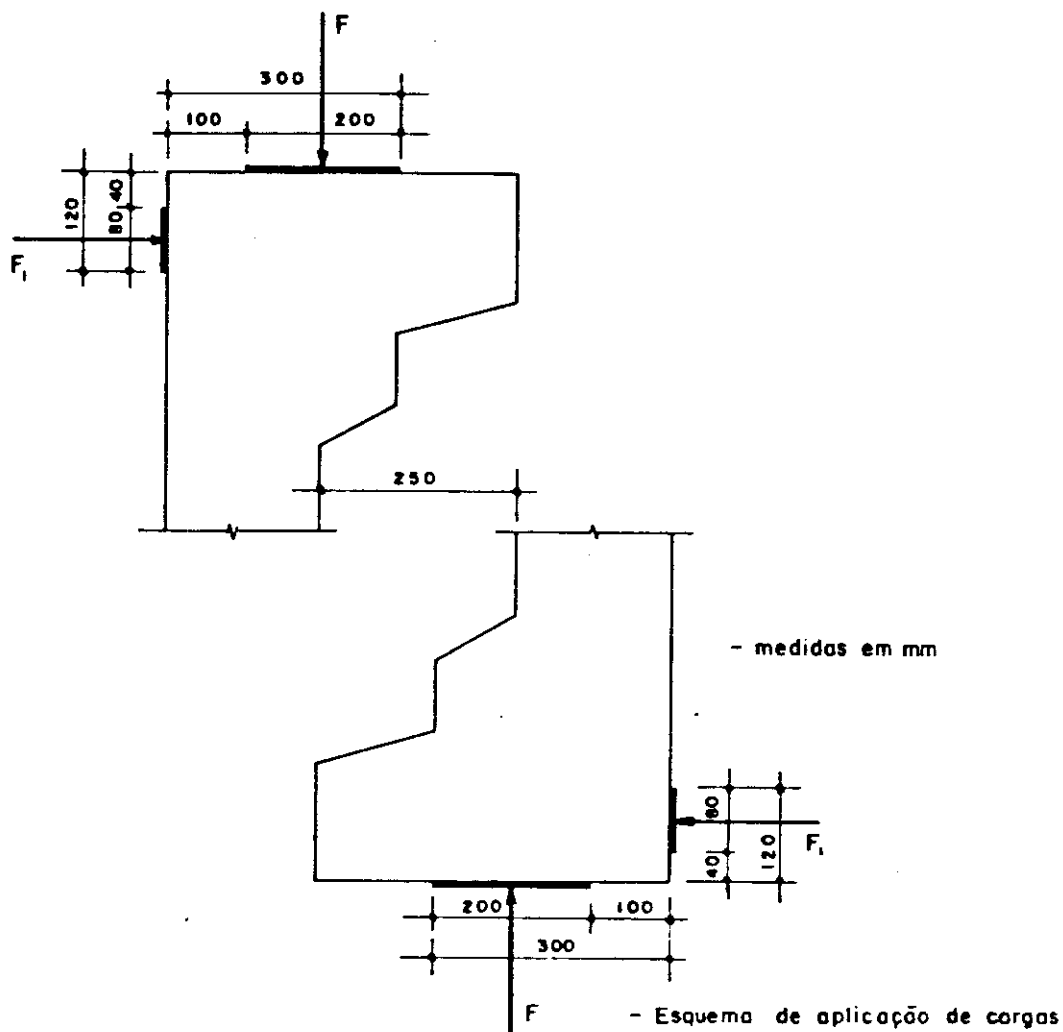
A_s → seção de armadura na junta; foi usada tela Tel con com 5cm de abertura nas duas direções.

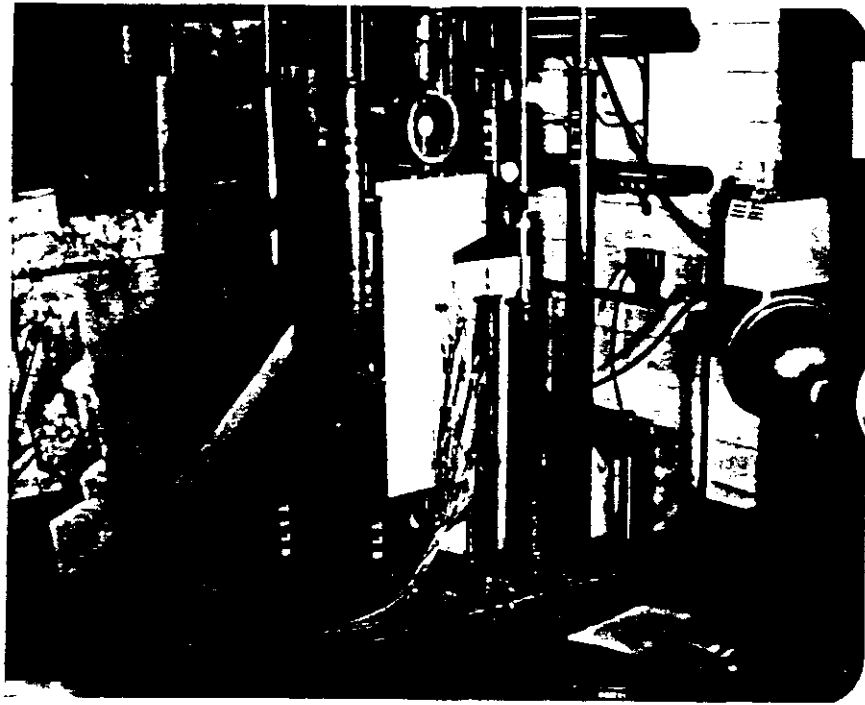
A_c → seção de concreto da junta (comprimento x espessura)

Quanto à forma de ensaio, inicialmente aplicou-se um carregamento que provocou solicitações meramente de cisalhamento sobre a junta, que se mostrou inviável para o tipo de peça construída por gerar fissuras secundárias, as quais poderiam causar (como nos modelos M2 e M9), ruína prematura. Em vista disso, optou-se por aplicar a carga em uma faixa aquém do cabeçote, produzindo sobre a junta essencialmente o mesmo efeito anterior, que exigiu, no entan

to, a introdução de coações laterais para mater o equilíbrio do modelo e evitar os mesmos efeitos anteriores.

Mostra-se nas figuras seguintes o esquema de aplicação das cargas e o dispositivo de ensaio.





DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
Aspectos do dispositivo de ensaio

2.2 - Os resultados dos ensaios

De acordo com a forma descrita de aplicação de cargas, ensaiou-se os modelos, e os resultados principais são mostrados no quadro abaixo.

MODELO	Carga de serviço (kN)	Carga de ruína teórica - F - (kN)	Carga de início de fissuração (kN)	Carga de ruína - F_r - (kN)	F/A_c (d)	F_r/A_c (d)	F_r/A_s (d)
M2	132	136	(b)	(b)	6,9	8,5	296,8
M3	132	156	(c)	120	7,9	6,6	229,7
M4	132	156	147	173	7,9	8,8	305,6
M5	263	306	276	285	7,7	7,2	251,8
M6	263	306	(c)	275	7,7	7,0	242,9
M7	166	262	140	220	6,6	5,6	388,7
M8	166	262	208	232	6,6	5,9	409,9
M9	166	268	(b)	(b)	6,8	5,6	388,7
M10	109	268	180	228	6,8	5,8	495,7
M11	55	134	(c)	125	6,8	6,3	543,5
M12	55	134	(c)	110	6,8	5,6	478,3

QUADRO 2 - Resultados de Cálculo e Teóricos

OBS.: a) a carga de serviço foi calculada segundo o processo descrito no cap. IV (item 5.5), limitando a abertura de fissuras em 0,3mm conforme o item 4.2.2 da NB-1. A carga de ruína foi obtida pela expressão $F = 0,2 f_c A_c$;

b) nesses modelos não se caracterizou a ruína, sendo ensaiados somente na fase elástica. Os valores F/A_c e F_r/A_c a eles atribuídos foram os máximos que se verificaram, respectivamente, no concreto e na armadura da junta;

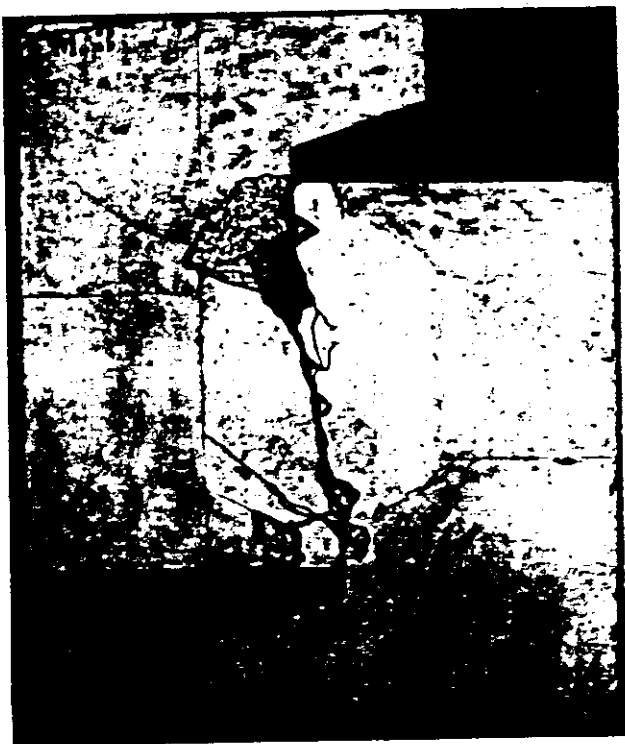
c) modelos que tiveram sua ruptura de forma brusca, sem aparente surgimento de fissuras nas fases que a antecederam;

d) não se trata de tensões medidas no concreto e nas armaduras das juntas, mas de valores calculados, que servem tão somente como elementos comparativos de resistência entre os diversos modelos.

3: CONCLUSÕES E NOVOS ENSAIOS

Pela análise dos resultados numéricos dos ensaios e pela observação dos modelos, pode-se concluir que esse tipo de junta se comporta satisfatoriamente quando submetida a solicitações preponderantemente de cisalhamento que, como se sabe, são os que ocorrem com maiores intensidades nas regiões de canto dos parabolóides, bem como na ligação destes com os apoios no contorno; no entanto, como complemento, serão tecidas algumas considerações decorrentes dessa análise.

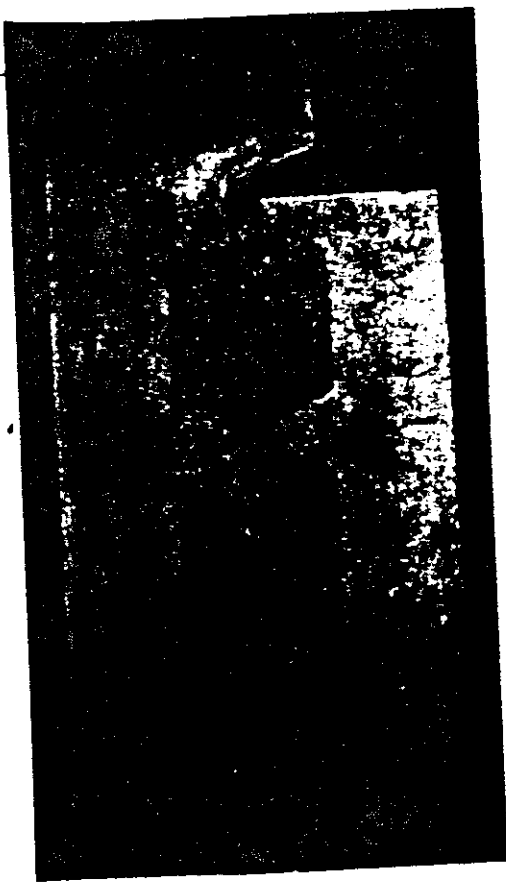
De maneira geral, a ruptura das juntas deu-se de forma brusca, sem aparecimento de fissuras que a antecipassem, por se tratar de ruína por compressão no concreto. Isto é evidenciado nos modelos M3 - M4 - M5 - M6, (fortemente armados) pelas tensões baixas nas armaduras e elevadas no concreto. Nos modelos M7 - M8 - M10 - M11 - M12, por outro lado, a ruptura por compressão está ligada à progressiva diminuição da seção comprimida, causada pela menor taxa de armadura da junta.



a)



b)



c)



d)



e)

Visto de alguns modelos ensaiados

Verifica-se, então, que é importante limitar a solicitação de compressão no concreto (o que leva ao espessamento do parabolóide nos cantos e bordas) e estabelecer uma armadura mínima de cisalhamento. Para a limitação da tensão no concreto, tem-se como indicativo o valor estabelecido em Baikov (8) e transcrito no cap. IV (item 3), ou seja:

$$\delta h f_c > P$$

que, para as dimensões das juntas (Fig. 4) e tomando $f_c = 35$ MPa, dá uma tensão de 8,9 MPa sobre o concreto das juntas. De acordo com os resultados do quadro 2 (M3 - M4 - M5 - M6), essa relação é um tanto otimista pois, segundo esses dados, tal tensão deveria ser limitada a um valor médio de 7,1 MPa, o qual corresponde a

$$0,80 \delta h f_c > P$$

que concorda aproximadamente com o valor especificado pela norma russa, na qual a tensão sobre o concreto é fixada em $0,2 f_c$ que, em valores médios, corresponde a 7,8 MPa.

- Quanto à armadura de cisalhamento, se for calculada como mostrado no item 5.5 do cap. IV, provavelmente se estará superdimensionando a seção da junta pois, como pôde ser notado, comparando as seções de ferro e a carga de ruína dos modelos M3 - M4 - M5 - M6 com as dos modelos M7 - M8 - M10 - M11 - M12, percebe-se que estes últimos, com aproximadamente metade da armadura dos anteriores, têm carga de ruína da ordem de 75% desses. Assim, como orientação geral, tem-se que, calculada a armadura de cisalhamento pelo processo citado e reduzindo-a adotando 70% desse valor e aplicando os coeficientes de majoração de cargas e de minoração de resistência dos materiais, a seção da junta estará dimensionada de forma mais econômica e sem perigo de ruína por compressão causada por alongamento excessi

da armadura, que viria diminuir a seção comprimida no concreto.

Em resumo, a preocupação maior nas seções das juntas é com o excesso de compressão no concreto e, desde que esta solicitação esteja dentro dos limites admissíveis não se terão maiores problemas. A diminuição da armadura de cisalhamento é economicamente interessante, mas deve ser lembrado que, em geral, no parabolóide talvez essa economia não seja significativa por envolver pequenas regiões.

Durante os ensaios foram também medidas deformações na armadura e no concreto. A elaboração e análise desses resultados certamente permitirão tirar conclusões pormenorizadas que todavia parecem, pelo menos no momento, ser de importância apenas complementar.

Além da obtenção dessas conclusões complementares, novos ensaios poderiam ser úteis, não apenas envolvendo aspectos de juntas mas também outros cujas finalidades seriam as de obter resultados que estabelecessem critérios confiáveis para melhor dimensionamento (talvez até com mais economia) dos parabolóides elípticos. Tais ensaios seriam, numa primeira anumeração, os seguintes, sem que a lista pretenda exaurir o assunto:

- Verificação da real interação do parabolóide com os apoios de contorno;
- Verificação do comportamento do parabolóide quando submetidos a recalques e deslocamentos horizontais.

Ainda nos aspectos de juntas, seria interessante estudá-las em peças de argamassa armada.

VI - CONCLUSÕES

Finda a dissertação e comparando os objetivos propostos ao início com o que foi desenvolvido, crê-se que foi aberta, ou pelo menos vislumbrada, uma opção construtiva nada corrente entre nós, mas que apresenta facetas bastante atraentes que foram evidenciadas e caracterizadas.

Foi um trabalho no qual, para sua elaboração, se levantou todo um material, que, esmiuçado e concatenado, permitiu fornecer subsídios úteis seja de cálculo ou de construção para os parabolóides elípticos e, numa visão crítica, procurou apontar deficiências de cálculo, motivadas pela falta de maiores pesquisas em certos pontos específicos ou ainda pela ausência de obras similares em nosso meio.

Na parte referente à pré-moldagem, procurou-se mostrar todos os aspectos envolvidos que se considerou como importantes seja em termos de cálculo, verificações, transporte, juntas (com estudo específico no cap. V), concretagem e outros detalhes. Espera-se, e isto é importante, que a parte referente às coberturas pré-moldadas de cascas

consiga fornecer novas idéias construtivas e mesmo de pes
quisa para outros trabalhos voltados a essas formas que,
mesmo tendo suas restrições de uso, estabelecem um campo
vasto de aplicação e de estudos.

Em termos de determinação dos esforços nos para
bolóides, tanto a abordagem de flexão como a de membrana
fornece respostas satisfatórias, com esta última necessi
tando, como visto, tão somente de pequenas modificações en
volvendo introdução de esforços de flexão em certos tre
chos e limitação dos esforços de cisalhamento nos cantos.
Observe-se que a resolução das equações de Vlasov foi fei
ta de forma clássica, ou seja, com condições simplificadas
no contorno, o que torna necessárias algumas correções na
região de conexão casca-apoio, para que se tenha um modelo
mais próximo do real.

Para essas correções apontaram-se alguns valores
experimentais e também teóricos, os quais, comparados e a
nalisados, mostraram-se incompletos, patenteando que pode
ria ser útil um estudo experimental abordando esses aspec
tos, assim como outros envolvendo a deslocabilidade hori
zontal e vertical dos pilares de cantos, influência da tem
peratura, problemas de estabilidade e outros; mas, como se
disse no cap. III, cremos que, com auxílio do cálculo ex
posto e das correções apresentadas, tem-se condições sufi
cientes para o projeto de parabolóides com geometrias que
o bom senso indique como normais, em termos de dimensões e
de relações entre elas.

BIBLIOGRAFIA

1. ABCP - ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE CIMENTO PORTLAND - "Análise Elementar das Cascas em Parabolóides".
2. ABU-SITTA, S.N. - "The Influence of Practical Boundary Conditions on Sinclastic Shells". International Symposium on Shell Structures in Engineering Practice - vol. 1 - Budapest, 1965.
3. AHM, P. and PERRY, E.J. - "Design of the Shell Roof for Smith Field Poultry Market". Proc's of the Institution of Civil Engineers - Jan., 1960.
4. ANGERER, F. - "Construcción Laminar - Elementos Y Estructuración". Editorial Gili, S.A. - Barcelona.
5. APELAND, K. - "Stress Analysis of Translational Shells". ASCE - Journal of the Structural Division - Feb., 1961.
6. APELAND, K. and G.P. POPOV - "Analysis of Bending Stress in Translational Shells". Proc's of the Colloquium on Simplified Calculation Methods. North-Holland. Publishing Co., Amsterdam, 1962.

7. APELAND, K. - "Analysis of Bending Stress in Translational Shells including Anisotropic and Inhomogeneous Properties". Acta Polytechnica - Civil Engineering and Building Construction Series n^o 22 - Norwegian Contribution n^o 23 - Trondheim 1963.
8. BAIKOV, V.N. - "Reinforced Concrete Structures". Mir Publishers, Moscow, 1978.
9. BELES, AUREL, A. and SOARE, M.V. - "Elliptic and Hyperboloidal Shells used in Constructions". London - S.P. Christie & Partners, 1976.
10. BELLUZZI, O. - "Scienza delle Construzioni". Zanicchelli, Bolonha, 1953, v. 3.
11. BILLINGTON, D.P. - "Thin Shell Concrete Structures". Mc-Graw-Hill, New York, 1960.
12. BOUMA, A.L. - "Some Aplications of the Bending Theory Regarding Doubly Curved Shells". Proc's of the Symposium on the Theory of thin Elastic Shells. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1960.
13. BRADSHAW, Richard, R. - "Some Aspects of Concrete Shell Buckling". ACI - Journal, march, 1963.
14. BUILDING CODE REQUIREMENTS FOR REINFORCED CONCRET (ACI 318-77) American Concrete Institute - Detroit - Michigan.
15. "CONCRETE SHELL STRUCTURES - PRACTICE AND COMMENTARY". Report of ACI - Commitee 334. ACI - Journal, sep 1964.
16. "COMPLEMENTOS DE TEORIA DAS CASCAS" - notas de aula (n^oo publicadas). Curso de P^os-Gradua^oo. Escola de Engenharia de S^o Carlos/USP.
17. DESHMUKH, R.S. and SREENATH, H.G. - "Precast Reinforced Concrete Hiperboloid Shells for Roofing Industrial Buildings". Indian Concrete Journal - July, 1973.

18. "DESIGN OF CYLINDRICAL CONCRETE SHELLS ROOFS". ASCE Manual of Engineering Practice, p^o 31. The American Society of Civil Engineers, New York, 1952.
19. DOGANOFF, I. - "Eine neue Schalenbauweise aus Stahlbeton - Fertigteilen". Die Bautechnik, mai. 1955.
20. DOGANOFF, I. - "Zwei Neuartige Hallen aus Schalenfertigteilen". Die Bautechnik. H7, 1961.
21. DOGANOFF, I. - "Betrachtungen über die Berechnungsverfahren Rechteckiger Kugelcolotten". Simplified Calculation Methods of Shell Structures. Proc's of Colloquium on Simplified Calculation Methods - Brussels - sep. 1961. North-Holland Publishing Co. Amsterdam. Interscience Publishers, Inc. - New York, 1962.
22. FISCHER, L. - "Determination of Membrane Stresses in Elliptic Paraboloids using Polynomials". ACI-Journal, oct., 1960.
23. FISCHER, L. - "Theory and Practice of Shell Structures". Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin, 1968.
24. FLÜGGE, W. and D.A. CONRAD - "A note on the Calculation of Shallow Shells". Journal of Applied Mechanics, dec., 1959.
25. FLÜGGE, W. - "Stresses in Shells". Springer - Verlag Berlin Heidelberg New York, 1973.
26. FOR BETON DO BRASIL - Catálogo Pré-Moldados for Beton.
27. GIBSON, J.E. - "A Theoretical and Computer Investigation of Multi-Shells of Double Curvature". World Conference on Shell Structures. San Francisco, 1962. National Academy of Sciences - National Research Council, Washington, D.C.
28. GRAVINA, P.B.I. - "Casas de Revolução", São Paulo, 1957.

29. HAAS, A.M. - "Prestressed Shell and Precast Units".
Proc's of the World Conference on Prestressed Con
crete. San Francisco, 1957.
30. HADAWI, N.S. and JOHN L. TAMER - "Multiple Shells of
Translation". ACI-Journal, Jan., 1966.
31. HALÁSZ, R. van y TANTOW, G. - "La Construcción con gran
des Elementos Pré-Fabricados". Ediciones Urmo -
Bilbao, 1972.
32. HANAI, J.B. - "Construções de Argamassa Armada: Situa
ção, Perspectivas e Pesquisas". Tese de Doutorado,
1982. Escola de Engenharia de São Carlos/USP.
33. HARRY, C. WALTER - "Precast Folded Plates Become Stan
dard Products". Journal of the American Concrete
Institute. vol. 60, oct., 1965.
34. HRUBAN, K. and HRUBAN, I. - "Effects of Volumes Varia
tions and of Prestressing on a Surface of Transla
tion". World Conference on Shell Structures, San
Francisco, 1962.
35. HURD, M.K. - "Formwork for Concrete". ACI-Special Pu
blication 4, Detroit, 1963.
36. INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON SHELLS STRUCTURES IN ENGI
NEERING PRACTICE. Budapest, Hungary, Aug.-Sep.,
1965. vol. I, II, III, IV.
37. KHAIDUKOV, G.K. - "Investigation and Experience in De
sign of Reinforced Concrete and Ferrocement Thin-
Walled Structures in the URSS". World Congress on
Shell and Spatial Structures. Madrid, sep., 1979.
38. KONCZ, TIHAMÉR - "Handbuch der Fertigteil - Bauweise".
Band II, Bauverlag GNBH, - Wiesbaden - Berlin, 1967.
39. "L'ALGEMENE BANK NEDERLAND" - Le Technique des Travaux.
Mai.-Jun., 1973.

40. "L'AUDITORIUM DU COLLEGE DE CULVER CITY (CALIFORNIA)".
Le Technique des Travaux. Mai. Juin., 1965.
41. "LE FUTUR OPERA DE SIDNEY" - Le Technique des Travaux".
Mai.-Juin., 1967.
42. LEONTOVICH, V. - "Pórticos y Arcos: Soluciones Conden
sadas para el Analisis Estructutal". México, Con
tinental, 1961.
43. MARTINELLI, D.A.O. - "Contribuição ao Emprego de Exten
sômetros Elétricos de Resistência no Estudo de Es
truturas". Tese de Doutorado, 1961. Escola de
Engenharia de São Carlos.
44. MARTINEZ, M.; COSTA, ARTURO; SCORDELIS, A.C. - "Cable
Suspended Precast Concrete Shell Roof for the New
San Juan Municipal Coliseum". Journal ACI - Nov.,
1973.
45. MEYER, A. - "Germany's First Glass Fiber Reinforced Con
crete Shell Roofs". Journal ACI - Nov., 1978.
46. MOKK, L. - "Construções con Materiales Prefabrica
dos de Hormigón Armado". Ediciones Urmo-Bilbao, 1969.
47. MONTANARI, I.; MARTINELLI, D.A.O. - "Placas Elásticas".
Publicação EESC/USP, 1976.
48. MURASKEV, V.I.; SIGALOV, G.V. and V.N. BAIKOV. "De
sign of Reinforced Concrete Structures". Mir Publi
shers, Moscow, 1971.
49. NOOR, A.K. and A.S. VELETOS - "A Study of Doubly Cur
ved Shallow Shells". Thesis, University of Illi
nois. nov., 1963.
50. PARME, A.L. - "Hiperbolics Paraboloids and Other Shells
of Double Curvature". Journal of the Structural Di
vision, ASCE, Sept., 1961.
51. RAMASWAMY, G.S. - "Design and Construction of Concrete
Shell Roofs". Tata-Mc Graw-Hill Co. Ltd., New
Delhi, 1978.

52. RAO, M.N.K. and SHARMA, S. - "Analysis of a Shallow Elliptic Paraboloidal Shell with edge beams". Indian Concrete Journal - Jan., 1965.
53. REKACH, V.G. - "Static Theory of Thin-Walled Space Structures". Mir Publishers, Moscow, 1978.
54. SAAH, B.G.H.C. - "Analysis of Shell Roofs with a Paraboloidal Surface". Indian Concrete Journal - Aug., 1960; Sep., 1960.
55. SREENATH, H.G.; CHELLADAD, A.; GEORGE, Z. and RAMAIAH, M. - "Economical Roofing for Industrial Building - The Precast pre Tensioned Hyperboloid Shell". Indian Concrete Journal - Jan., 1980.
56. SUT, S. - "Precast, Prestressed Conoidal Northlight roof for Industrial Building".
57. TEDESKO, A. - "Construction Aspects of Thin-Shell Structures". Journal ACI, Feb., 1953.
58. "TEORIA DAS CASCAS" - Notas de aula (não publicadas), Curso de Pós-Graduação. Escola de Engenharia de São Carlos/USP.
59. TIMOSHENKO, S. and S. WOINOWSKY-KRIEGER - "Theory of Plates and Shells". Mc Graw-Hill Book Co., New York, 1959.
60. TOROCO, E. - "Bovedas Autoportantes Pré-Fabricadas de Ceramica". XIV Jornadas Sul Americanas de Engenharia Estructural, Buenos Aires, 1970.
61. VINACCIA, G. - "Structures Laminaires em Béton Armé". Dunod, Paris, 1963.
62. VLASOV, V.Z. - "Allgemeine Schalen Theorie and ihre Anwendung in der Technik". Akademie-Verlag GmbH, Berlin, 1958.
63. WHITNEY, C.S.; B.G. ANDERSON and H. BIRNBAUM - "Reinforced Concrete Folded Plates Construction". Jour

nal of the Structural Division, ASCE, vol. 85, oct., 1959.

64. WINOKUR, A. and A. BLOCH - "Iterative Solution for Ar
ches Frames Supporting Shells". ACI-Journal, July,
1966.
65. ZALEWSKY, W. - "A Simplified Manner of Calculating
Shell Diafragms Traverses". Proc's of the Collo
quium on Simplified Methods, Brusseles, North-Hol
land Publishing Co., Amsterdam, 1962.
66. ZHUKOVSKY, G.Z. and LVOV, E.N. - "Precast Concrete
Shells for Civil Building in the URSS". World Con
gress on Shell and Spatial Structures - Madrid -
sep., 1979.

ANEXO 1

CASCAS CURVAS E PRISMÁTICAS

Tradução livre do ACI 318-77 (cap. 19) e das recomendações do artigo "Concrete Shell Structures Practice and Commentary" (15).

1. NOTAÇÃO

f'_c - tensão característica de compressão do concreto,
 lb/pol^2

$\sqrt{f'_c}$ - raiz quadrada da tensão característica de compressão do concreto

f_y - tensão de escoamento da armadura não protendida,
 lb/pol^2

h - espessura

ϕ - coeficiente de minoração de resistência dos materiais.

2. CAMPO DE APLICAÇÃO E DEFINIÇÕES

- 2.1 - Estas recomendações são aplicáveis no projeto de cascas delgadas de concreto armado e somente são válidas para as seções delgadas dessas estruturas.
- 2.2 - São aplicáveis todas as recomendações e especificações do ACI Building Code (ACI 318-77), inclusive aquelas referentes à pré-moldagem e protensão, excetuando-se as que conflitam com estas recomendações.
- 2.3 - As cascas delgadas, curvas ou prismáticas, são aquelas cuja espessura é pequena comparada às suas outras dimensões; caracterizam-se por terem comportamento tri-dimensional quando submetidas a ações externas, o que decorre de suas formas geométricas, de suas condições de suporte e da natureza das cargas aplicadas.
- 2.4 - As cascas delgadas geralmente têm, ao longo de suas bordas, elementos de suporte ou de enrijecimento cujas funções são as de enrijecê-las e distribuir e suportar as cargas em ação conjunta com elas.
- 2.5 - A análise elástica das cascas delgadas é feita por qualquer análise estrutural baseada no comportamento elástico e que envolva hipóteses aproximadoras convenientes para o comportamento elástico tridimensional. Análises envolvendo testes em modelos, quando bem conduzidas, são consideradas como válidas.

3. CONSIDERAÇÕES GERAIS

- 3.1 - O comportamento elástico será aceito como base para a determinação dos esforços internos, deslocamentos e estabilidade das cascas delgadas. Deverá ser feita a verificação do equilíbrio entre as solicitações internas e externas.
- 3.2 - Métodos aproximados de análise que não satisfaçam à compatibilidade de tensões e deformações, poderão ser utilizados para as cascas delgadas, desde que a prática ou pesquisas positivas as tenham indicado como válidas.
- 3.3 - Elementos de cascas delgadas, poderão ser dimensionadados para as condições de resistência de acordo com o especificado pelo ACI 318-77.
- 3.4 - Quando se investigar as cascas face a problemas de estabilidade, deverão ser feitas considerações que incluam a possível redução na carga de flambagem originada por grandes deslocamentos, efeitos de fluência e as mudanças de geometria entre a superfície teórica e a real.

4. ELEMENTOS DE SUPORTE

- 4.1 - Os elementos de suporte serão projetados de acordo com as recomendações do ACI 318-77.
- 4.2 - Uma faixa da casca de comprimento igual à faixa colababorante poderá ser admitida como trabalhando em conjunto com o suporte.

- 4.3 - Quando é considerada essa faixa colaborante, será colocada nesta uma armadura suplementar perpendicular ao apoio com seção igual à prevista para vigas T.

5. ANÁLISES COM MODELOS

- 5.1 - Análises baseadas em resultados de testes em modelos elásticos poderão ser consideradas como válidas.
- 5.2 - Quando a análise com modelos é feita, apenas aquelas porções da casca afetadas pelo efeito analisado necessitarão ser simuladas.
- 5.3 - Toda atenção deve ser tomada para assegurar que esses testes revelem quantitativamente o comportamento do protótipo.

6. HIPÓTESES DE CÁLCULO

- 6.1 - Na análise elástica das cascas delgadas, o material pode ser considerado como idealmente elástico, homogêneo e isotrópico.
- 6.2 - O coeficiente de Poisson pode ser admitido como nulo.

7. RESISTÊNCIA DE PROJETO DOS MATERIAIS

- 7.1 - A tensão característica de compressão do concreto aos 28 dias não será menor que 3.000 lb/pol^2 .
- 7.2 - A tensão de escoamento da armadura não excederá 60.000 lb/pol^2 .

8. ARMADURA DA CASCA

- 8.1 - A seção de armadura em pol/m^2 não deverá exceder $7.2 \frac{h f'_c}{f_y}$ e nem $29.000 \frac{h}{f_y}$.
- 8.2 - Se a armadura for posicionada com um desvio em relação às direções principais superior a 10° , a seção da armadura não deverá exceder metade da do item anterior.
- 8.3 - A distância entre as barras da armadura não deverá ultrapassar mais que cinco vezes a espessura da casca e nem 48 pol.
- 8.4 - Em regiões onde a tensão principal de tração devido a sobrecargas ultrapassar $4 \phi \sqrt{f'_c}$, as barras da armadura não serão espaçadas mais que 3 vezes a espessura da casca.
- 8.5 - A armadura da casca terá a função de absorver a totalidade das tensões de tração, mas não será menor que a de distribuição.
- 8.6 - A armadura, admitida para atuar à altura do folheto médio, pode ser posicionada paralelamente às direções das tensões principais de tração em duas ou três componentes.
- 8.7 - Em regiões de altas trações, a armadura deverá ser posicionada paralelamente às direções principais de tração.
- 8.8 - A armadura pode ser considerada como paralela às direções principais de tração, desde que seu desvio não seja superior a 15° .

- 8.9 - Em seções bastante armadas, o desvio de 15° do item anterior pode ser aumentado desde que a cada grau acrescido nesse desvio, se diminua a tensão f_y de 5%.
- 8.10- As variações nas direções principais de tração devido a momentos não precisam ser consideradas para a determinação do máximo desvio.
- 8.11- As armaduras frouxas dispostas em mais de uma direção serão dimensionadas para resistir às componentes das tensões principais em cada direção.
- 8.12- Onde as tensões de tração variam muito de intensidade (como nas cascas cilíndricas e cúpulas), a armadura resistente de tração pode ser concentrada em regiões em que estas são máximas; contudo, a seção da armadura na zona tracionada não deverá ser menor que 0,35 vezes a área da seção transversal da casca.
- 8.13- A armadura necessária de flexão será determinada considerando também os esforços normais.
- 8.14- Emendas na armadura de combate às solicitações principais serão feitas de acordo com as recomendações do Cap. 12 (ACI 318-77)
- 8.15- A armadura da casca na junção com os apoios ou elementos de borda serão feitos com armaduras dobradas, ganchos ou solda.

9. PROTENSÃO

- 9.1 - Quando existir armaduras protendidas, será considerada no cálculo todas as suas componentes.

10. CONSTRUÇÃO

- 10.1 - Quando a retirada das fôrmas e escoramentos for baseada num valor específico para o módulo de deformabilidade do concreto, este deverá ser determinado por testes em vigas.
- 10.2 - As dimensões das vigas e a forma de ensaio serão especificados pelo engenheiro responsável.
- 10.3 - A distribuição e o carregamento dessas vigas será de tal modo que ocorra principalmente flexão.

ANEXO 2

LISTAGEM DO PROGRAMA

PAGE 1 LUCIO R.

LUCIO R.

// JOB 1

LOG DRIVE CART SPEC CART AVAIL PHY DRIVE
0000 0018 0018 0000

V2 M11 ACTUAL 32K CONFIG 32K

// FOR

*LIST SOURCE PROGRAM

*EXTENDED PRECISION

```
SUBROUTINE CCEF(T1,T2,T3,T4,AY,AL,C,LUC)
DIMENSION C(4,4)
A1=T1*AY/2
A2=T2*AY/2
A3=T3*AY/2
A4=T4*AY/2
A5=((EXP(A1)+EXP(-A1))*CCS(A2))/2
A6=((EXP(A1)-EXP(-A1))*SIN(A2))/2
A7=((EXP(A3)+EXP(-A3))*CCS(A4))/2
A8=((EXP(A3)-EXP(-A3))*SIN(A4))/2
A9=((EXP(A1)-EXP(-A1))*CCS(A2))/2
A10=((EXP(A3)-EXP(-A3))*CCS(A4))/2
A12=((EXP(A3)+EXP(-A3))*SIN(A4))/2
A13=((EXP(A1)+EXP(-A1))*SIN(A2))/2
A30=T1**3-3*T1*T2*T2-AL*AL*T1*T2
A31=3*T1*T1*T2-T2**3-2*AL*AL*T2
A32=T3**3-3*T3*T4*T4-2*AL*AL*T3
A33=3*T3*T3-T4**3-2*AL*AL*T4
B1=T1*T1-T2*T2
B2=2*T1*T2
B3=T3*T3-T4*T4
B4=2*T3*T4
DO 7 I=1,4
DO 7 J=1,4
7 C(I,J)=0.
IF(LUC)1,2,1
2 C(1,1)=C(1,1)+A5
C(2,1)=C(2,1)+A6
C(3,1)=C(3,1)+B1*A5-B2*A6
C(4,1)=C(4,1)+B1*A6+B2*A5
C(1,2)=C(1,2)+A6
C(2,2)=C(2,2)+(-1*A5)
C(3,2)=C(3,2)+B1*A6+B2*A5
C(4,2)=C(4,2)-B1*A5+B2*A6
C(1,3)=C(1,3)+A7
C(2,3)=C(2,3)-1*A8
C(3,3)=C(3,3)+(B3*A7-B4*A8)
C(4,3)=C(4,3)-(B3*A8+B4*A7)
C(1,4)=C(1,4)+A8
C(2,4)=C(2,4)+A7
C(3,4)=C(3,4)+(B3*A8+B4*A7)
C(4,4)=C(3,3)
GO TO 10
1 C(1,1)=C(1,1)+A30*A9-A31*A13
C(2,1)=C(2,1)+T1*A13+T2*A9
C(3,1)=C(3,1)+B1*A5-B2*A6
C(4,1)=C(4,1)+A6
C(1,2)=C(1,2)+A31*A9+A30*A13
C(2,2)=C(2,2)-T1*A9+T2*A13
C(3,2)=C(3,2)+B1*A6+B2*A5
C(4,2)=C(4,2)-A5
C(1,3)=C(1,3)+A32*A10-A33*A12
C(2,3)=C(2,3)-T3*A12-T4*A10
C(3,3)=C(3,3)+B3*A7-B4*A8
C(4,3)=C(4,3)-A8
C(1,4)=C(1,4)+A33*A10+A32*A12
C(2,4)=C(2,4)+T3*A10-T4*A12
C(3,4)=C(3,4)+B3*A8+B4*A7
C(4,4)=C(4,4)+A7
10 RETURN
END
```

FEATURES SUPPORTED
EXTENDED PRECISION

CORE REQUIREMENTS FOR CCEF
COMMON C VARIABLES

94 PROGRAM 1110

RELATIVE ENTRY POINT ADDRESS IS 0070 (HEX)

```
*STORE WS UA CCEF
D 06 ENTRY POINT NAME ALREADY IN LET/FLET
```

```
// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*EXTENDED PRECISION
SUBROUTINE INDEP(A,RY,AL,EH,D,GE,TI,LUA)
DIMENSION TI(4,1)
DO 5 I=1,4
  J=1
  5 TI(I,J)=0.
  IF(LUA)1,2,1
  2 TI(1,1)=TI(1,1)-A*RY*AL*AL/(EH)
  TI(2,1)=TI(2,1)-A/(D*GE*GE)
  GO TO 20
  1 TI(3,1)=TI(3,1)-A/(D*GE*GE)
20 RETURN
END
```

```
FEATURES SUPPORTED
EXTENDED PRECISION
```

```
COKE REQUIREMENTS FOR INDEP
COMMON 0 VARIABLES 8 PROGRAM 122
```

```
RELATIVE ENTRY POINT ADDRESS IS 0011 (HEX)
```

```
END OF COMPILATION
```

```
// DUP
```

```
*STORE WS UA INDEP
CART ID CC18 DB ADDR 5D95 DB CNT 0009
```

```
// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*EXTENDED PRECISION
SUBROUTINE GRJIS(N,F)
DIMENSION F(4,4),B(4),CX(4),IP(4),IC(4)
DO 1 K=1,N
  T=C.
  DO 6 I=K,N
    S=C.
    DO 3 J=K,N
      3 S=S+ABS(F(I,J))
      IF(S)4,5,4
    4 DO 2 J=K,N
      IF(ABS(F(I,J))-S#T)2,2,7
    7 IP(K)=I
      IC(K)=J
      PIVO=F(I,J)
      T=ABS(PIVO/S)
    2 CONTINUE
    6 CONTINUE
    IF(T)101,5,101
  101 IF(IP(K)-K)8,98,8
  8 DO 9 J=1,N
    IPK=IP(K)
    Z=F(IPK,J)
    F(IPK,J)=F(K,J)
    9 F(K,J)=Z
  98 IF(IC(K)-K)10,20,10
  10 ICK=IC(K)
  DO 11 I=1,N
    Z=F(I,ICK)
    F(I,ICK)=F(I,K)
    11 F(I,K)=Z
  20 DO 12 J=1,N
    IF(J-K)13,14,13
  14 B(J)=1/PIVO
    CX(J)=1.
    GO TO 15
  13 B(J)=-F(K,J)/PIVO
    CX(J)=F(J,K)
  15 F(K,J)=C.
  12 F(J,K)=C.
  DO 1 I=1,N
    DO 1 J=1,N
      F(I,J)=F(I,J)+CX(I)*B(J)
  1 CONTINUE
  DO 16 KAU=1,N
    K=N-KAU+1
    IF(IP(K)-K)17,18,17
```



```

      SELUC=LUA=1 PARAB. APCIADO EM DOIS LADOS
NI =NUM. DE ITERACOES NAS SERIES
MM1 =NUM. DE PONTOS QUE SE QUER CONHECER OS ESFORÇOS NA DIR. OX
NN1 =NUM. DE PONTOS QUE SE QUER CONHECER OS ESFORÇOS NA DIR. OY

```

```

1 READ(2,1)AX,AY,RX,RY,HE
  FORMAT(2F7.2,2F8.2,F7.3)
2 READ(2,2)EH,D,CP
  FORMAT(F10.0,F6.0,F6.2)
3 READ(2,3)C
  FORMAT(F6.2)
4 READ(2,4)LUC,LUA,MM1,NN1,NI
  FORMAT(2I2,3I3)
  WRITE(5,6)
5 FORMAT(1H1,////,33X,'CALCULO DE UM PARABOLOIDE ELIPTICO SOBRE BASE
  * RETANGULAR',///,11X,'CARACTERISTICAS GERAIS',////)
  WRITE(5,7)AX,AY,RX,RY,HE,EH,D
6 FORMAT(11X,'COMPRIM. SEGUNDO CX',10X,F7.2,'(M)',/,11X,'COMPRIM. SE
  *GUNDO OY',10X,F7.2,'(M)',/,11X,'RAIO DE CURVATURA EM OZX',4X,F8.2,
  *'(M)',/,11X,'RAIO DE CURVATURA EM OZY',4X,F8.2,'(M)',/,11X,'ESPES
  *SURA',20X,F7.3,'(M)',/,11X,'RIGIDEZ AXIAL',18X,F8.0,'(KN/M)',/,11X,
  *'RIGIDEZ A FLEXAO',13X,F6.0,'(KN.M/M)'')
  WRITE(5,71)CP,C
71 FORMAT(11X,'COEFICIENTE DE POISSON',7X,F6.2,/,11X,'CARREGAMENTO',1
  *7X,F6.2,'(KN/M2)'')

```

```

QE=SQRT(SQRT(EH/D))
QE =RAIZ QUARTA DA RELACAO ENTRE OS MODULOS DE RIGIDEZ AXIAL E A FLEXAO
M1=MM1
N1=NN1
DO 10 I=1,M1
DO 10 J=1,N1
ENX(I,J)=0.
ENY(I,J)=0.
ENXY(I,J)=0.
FX(I,J)=0.
EMX1(I,J)=0.
EMY1(I,J)=0.
EMX(I,J)=0.
EMY(I,J)=0.
VX(I,J)=0.
VY(I,J)=0.
10 W(I,J)=0.

```

CALCULO DAS CONSTANTES A11,A14,A21,A24,EM FUNCAO DAS CONDICAOES DE CONTOR

```

DO 20 M=1,N1
N=2*M-1
AL=3.1415926*N/AX
Q1=AL*AL
Q2=-(QE**4)/(4*RX*RX)
Q3=QE*QE*AL*AL*(1/RX-1/RX)
Q4=QE*QE/(2*RX)
S1=SQRT((SQRT(Q2*Q2+Q3*Q3)+Q2)/2)
S2=SQRT((SQRT(Q2*Q2+Q3*Q3)-Q2)/2)
T1=SQRT((SQRT((Q1+S1)**2+(-Q4+S2)**2)+(Q1+S1))/2)
T2=SQRT((SQRT((Q1+S1)**2+(-Q4+S2)**2)-(Q1+S1))/2)
T3=SQRT((SQRT((Q1-S1)**2+(-Q4-S2)**2)+(Q1-S1))/2)
T4=SQRT((SQRT((Q1-S1)**2+(-Q4-S2)**2)-(Q1-S1))/2)
L1=T1*T1-T2*T2
B2=2*T1*T2
B3=T3*T3-T4*T4
B4=2.*T3*T4
A5C=T1*T1*T1-3*T1*T2*T2
A51=3*T1*T1*T2-T2*T2*T2
A52=T3*T3*T3-3*T3*T4*T4
A53=3*T3*T3*T4-T4*T4*T4
A4C=2*AL*(T1**2-T2**2)-AL**3
A41=4*AL*T1*T2
A42=2*AL*(T3**2-T4**2)-AL**3
A43=4*AL*T3*T4
Z=(C*1.2732/N)*((-1)**((N-1)/2))
A=(QE**4)*RY*Z/((AL**6)*RY*RY+(QE**4)*AL*AL)

```

GERACAO DA MATRIZ DOS COEFICIENTES DAS INCOGNITAS E DO VETOR DOS TERMOS DEPENDENTES

```

CALL COEF(T1,T2,T3,T4,AY,AL,C,LUC)
CALL INDEP(A,RY,AL,EH,D,CE,T1,LUA)
IO=4

```

```
CALL GRJIS(IC,C)
CALL PROC(C,TI,H,A11,A14,A21,A24)
```

CALCULO DOS ESFORÇOS E DESLOCAMENTOS

```
X=C.
Y=C.
DO 30 I=1,M1
DC 40 J=1,N1
F1 = ((EXP(T1*Y)-EXP(-T1*Y))/2)*SIN(T2*Y)
F2 = ((EXP(T1*Y)+EXP(-T1*Y))/2)*COS(T2*Y)
F3 = ((EXP(T3*Y)-EXP(-T3*Y))/2)*SIN(T4*Y)
F4 = ((EXP(T3*Y)+EXP(-T3*Y))/2)*COS(T4*Y)
F5 = ((EXP(T1*Y)-EXP(-T1*Y))/2)*COS(T2*Y)
F6 = ((EXP(T1*Y)+EXP(-T1*Y))/2)*SIN(T2*Y)
F7 = ((EXP(T3*Y)-EXP(-T3*Y))/2)*COS(T4*Y)
F8 = ((EXP(T3*Y)+EXP(-T3*Y))/2)*SIN(T4*Y)
```

GERACAO DOS ESFORÇOS E DESLOCAMENTOS

```
ENX(I,J)=ENX(I,J)+(D*QE*QE)*(A11*(F1*B1+F2*B2)-A14*(B1*F2-B2*F1)-A
*21*(B3*F3+B4*F4)+A24*(B3*F4-B4*F3))*COS(AL*X)

ENY(I,J)=ENY(I,J)-(AL*AL*D*QE*QE)*(A11*F1-A14*F2-A21*F3+A24*F4)*CO
*S(AL*X)-A*AL*AL*CCS(AL*X)

ENXY(I,J)=ENXY(I,J)+(AL*D*QE*QE)*(A11*(T1*F6+T2*F5)-A14*(T1*F5-T2*
*F6)-A21*(T3*F8+T4*F7)+A24*(T3*F7-T4*F8))*SIN(AL*X)

EMX1(I,J)=EMX1(I,J)+D*AL*AL*(A11*F2+A14*F1+A21*F4+A24*F3+A*AL*AL*R
*Y/EH)*COS(AL*X)

EMY1(I,J)=EMY1(I,J)-D*(A11*(B1*F2-B2*F1)+A14*(B1*F1+B2*F2)+A21*(B3
**F4-B4*F3)+A24*(B3*F3+B4*F4))*COS(AL*X)

EMX(I,J)=EMX1(I,J)+CP*EMY1(I,J)
EMY(I,J)=EMY1(I,J)+CP*EMX1(I,J)

FN(I,J)=(ENX(I,J)+ENY(I,J))/2+SQRT(((ENX(I,J)-ENY(I,J))/2)**2+ENXY
*(I,J)**2)

VX(I,J)=VX(I,J)-D*((A11*F2-A41*F1)+A14*(A40*F1+A41*F2)+A21*(A42*F4
*-A43*F4)-A*(AL**5)/EH)*SIN(AL*X)

VY(I,J)=VY(I,J)-D*(A11*(F5*A50-F6*A51)+A14*(F5*A51+F6*A50)+A21*(F7
**A52-F8*A53)+A24*(F7*A53+F8*A52))*CCS(AL*X)

W(I,J)=W(I,J)+(A11*F2+A14*F1+A21*F4+A24*F3+A*AL*AL*RY/EH)*COS(AL*X
*)
Y=Y+AY/(2*(NN1-1))
40 CONTINUE
Y=C.
X=X+AX/(2*(MM1-1))
30 CONTINUE
20 CONTINUE
```

IMPRESSAO DOS RESULTADOS

```
WRITE(5,8)
8 FORMAT(7(/),11X,'ESFORÇO NORMAL NX(KN/M)',//)
WRITE(5,9)((ENX(I,J),I=1,M1),J=1,N1)
9 FORMAT(8X,11F8.2)
WRITE(5,11)
11 FORMAT(7(/),11X,'ESFORÇO NORMAL NY(KN/M)',//)
WRITE(5,12)((ENY(I,J),I=1,M1),J=1,N1)
12 FORMAT(8X,11F8.2)
WRITE(5,13)
13 FORMAT(7(/),11X,'ESFORÇO DE CISALHAMENTO NXY (KN/M)',//)
WRITE(5,14)((ENXY(I,J),I=1,M1),J=1,N1)
14 FORMAT(8X,11F8.2)
WRITE(5,15)
15 FORMAT(7(/),11X,'ESFORÇO PRINCIPAL DE TRACAO F1 (KN/M)',//)
WRITE(5,16)((FN(I,J),I=1,M1),J=1,N1)
16 FORMAT(8X,11F8.2)
WRITE(5,19)
19 FORMAT(7(/),11X,'MOMENTO FLETOR MX (KN.M/M)',//)
WRITE(5,21)((EMX(I,J),I=1,M1),J=1,N1)
21 FORMAT(8X,11F8.2)
```

```

23 FORMAT(8X,11F7.2)
   WRITE(5,24)
24 FORMAT(7(//),11X,'ESFORCC CORTANTE EFETIVO VX (KN/M)')
   WRITE(5,25)((VX(M1,J),J=1,N1)
25 FORMAT(8X,11F6.2)
   WRITE(5,26)
26 FORMAT(7(//),11X,'ESFORCC CORTANTE EFETIVO VY (KN/M)')
   WRITE(5,27)((VY(I,N1),I=1,M1)
27 FORMAT(8X,11F6.2)
   WRITE(5,28)
28 FORMAT(7(//),8X,'DESLOCAMENTO VERTICAL (M)')
   WRITE(5,29)((W(I,J),I=1,M1),J=1,N1)
29 FORMAT(8X,11E10.3)
   CALL EXIT
   END

```

FEATURES SUPPORTED
 EXTENDED PRECISION
 ICCS

CORE REQUIREMENTS FOR
 COMMON C VARIABLES 4286 PROGRAM 2912

END OF COMPILATION

// XEQ

ANEXO 3

FORMAS E CIMBRAMENTOS PARA CASCAS CURVAS E PRISMÁTICAS

Tradução livre do item relativo
a cascas curvas e prismáticas
do texto "FORMWORK FOR CONCRE-
TE" (35)

1. CONSIDERAÇÕES GERAIS

Em estruturas de comportamento especial e aquelas para cobertura de grandes vãos, o projeto e o planejamento da execução e retirada das formas e cimbres deverão ser feitos por elementos com qualificações e experiência suficientes, os quais deverão trabalhar em conjunto com o projetista a fim de que a superfície final a ser obtida seja a mais próxima da idealizada.

2. RECOMENDAÇÕES

2.1 - Projeto

- a- quando parte do apoio provisório estiver apoiado sobre a estrutura da cobertura, deverá ser especificado valores limites e sentidos das ações aplicadas.
- b- desde que especificado ou necessário, deverá ser incluído no projeto o plano e a sequência de cimbramento e des-
cimbramento de acordo com o equipamento a ser utilizado na construção.
- c- na determinação dos esforços laterais sobre a estrutura de apoio provisório, a carga de vento será estimada com um valor mínimo de 730N por m^2 de área projetada na vertical; nas cúpulas deve-se considerar as cargas de sucção.
- d- para cada elemento componente do cimbramento deve ser feita uma análise completa envolvendo a determinação dos esforços máximo e mínimo atuantes sobre ele, inclusive considerando as possibilidades de inversão do sentido de carregamento. Obrigatoriamente deverá se prever as cargas assimétricas ou excêntricas que eventualmente possam ocorrer durante a concretagem ou quando do posicionamento, retirada ou movimento dos cimbres. Deve-se também verificar as deformações verticais e horizontais do sistema de apoio, assim como sua estabilidade a fim de que funcione satisfatoriamente e que as tolerâncias sejam respeitadas. No projeto e detalhamento de elementos individuais e conexões, cuidados especiais deverão ser tomados a fim de que estes permitam deformações mínimas. Desde que o peso do sistema de apoio provisório pode ser, muitas vezes, igual ou superior ao das cargas de projeto, ele deverá ser colocado de tal forma e cuidado que as formas e os cimbres soltem-se facilmente da estrutura concretada e não se constituam sobre esta em sobrecargas adicionais.

e- devido às formas especiais envolvidas, as tolerâncias, em função dessas formas, deverão ser especificadas em projeto.

3. PLANEJAMENTO DO CIMBRAMENTO E DESCIMBRAMENTO

Desde que solicitado, o construtor deverá submeter para apreciação e aprovação do projetista estrutural um planejamento detalhado do esquema de cimbramento e descimbramento, o qual deve constar a sequência de concretagem proposta e as possíveis alternativas e deve especificar a sequência de retirada dos cimbres para se assegurar que a estrutura pode assumir a forma desejada sem maiores danos estruturais ou estéticos,

4. APROVAÇÃO DO PLANEJAMENTO

A aprovação do planejamento de execução deve contar com a verificação e concordância do projetista.

5. CONSTRUÇÃO

Durante o planejamento e quando do posicionamento das formas e cimbres, deverão ser seguidas recomendações que visem a obtenção da forma correta para a estrutura, sendo que na execução deve-se contar com equipamentos para verificação do alinhamento e verticalidade do sistema de apoio.

Quando se usar formas móveis recomenda-se que seja feita uma rampa de no mínimo 1cm/m para facilitar a retirada das superfícies verticais. Quando a superfície apresenta inclinação superior a 35° recomenda-se o uso de formas duplas, as quais serão dispensadas se houver grande densidade de barras ou malhas nas seções interessadas.

6. DESCIMBRAMENTO

A retirada das formas e do cimbramento deverá seguir a sequência especificada, sendo que deve-se planejá-la de modo a prevenir a ocorrência de cargas concentradas em qualquer parte da estrutura. Devido aos deslocamentos relativamente e à alta relação peso próprio/sobrecargas comuns nesses tipos estruturais, o descimbramento não será permitido até que ensaios em corpos de prova demonstrem ter sido atingidos uma resistência de compressão e um módulo de deformabilidade especificados.

Geralmente a sequência de descimbramento deve iniciar-se pelos pontos de deslocamentos máximos em direção aos de mínimos, sendo que o descimbramento dos apoios processa-se juntamente com a parte da casca que lhes são adjacentes.

Data	20 / 04 / 1993
Proc.	
Ped.	
Liv.	
Cr\$	Valor / 100